Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

Н. Я. ВИЛЕНКИН

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 35

Н. Я. ВИЛЕНКИН

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

*ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

518
В 44
УДК 512:37

АННОТАЦИЯ

В этой книге в популярной форме рассказывается о методах приближенного решения алгебраических, тригонометрических, показательных и других уравнений. Книга рассчитана на учеников старших классов, учащихся техникумов, учителей математики и лиц, сталкивающихся в практической деятельности с решением уравнений. По ходу изложения в книге вводятся некоторые элементарные понятия высшей математики. К книге приложено 27 упражнений и их решения.

Наум Яковлевич Виленкин

Метод последовательных приближений
(Серия «Популярные лекции по математике»)

М., 1968 г., 108 стр. с илл.

Редактор *В. М. Гринберг*

Техн. редактор *Л. А. Пыжова* Корректор *С. Д. Кайсер*

Сдано в набор 27/X 1967 г. Подписано к печати 26/I 1968 г. Бумага 84×108¹/₃₂. Физ. печ. л. 3,375. Условн. печ. л. 5,67. Уч.-изд. л. 4,63. Тираж 100 000 экз. Т-00023. Цена книги 15 коп. Заказ № 3569

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

2-2-2
146-68

Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие ко второму изданию 5
Предисловие к первому изданию 5

§ 1. Введение 7
§ 2. Последовательные приближения 10
§ 3. Ахиллес и черепаха 13
§ 4. Деление на электронных вычислительных машинах . . . 16
§ 5. Извлечение квадратиых корней методом последовательных приближений. 18
§ 6. Извлечение корней с натуральным показателем по методу последовательных приближений. 25
§ 7. Метод итераций. 28
§ 8. Геометрический смысл метода итераций 31
§ 9. Сжимающие отображения. 33
§ 10. Сжимающие отображения и метод итераций 37
§ 11. Способ хорд 43
§ 12. Усовершенствованный способ хорд 48
§ 13. Производная от многочлена 49
§ 14. Метод Ньютоиа приближенного решения алгебраических уравнений 51
§ 15. Геометрический смысл производной 55
§ 16. Геометрический смысл метода Ньютона 57
§ 17. Производиые любых функций 59
§ 18. Вычисление производных 61
§ 19. Нахождеиие первых приближеиий 64
§ 20. Комбинированный метод решения уравнений 66
§ 21. Призиак сходимости процесса итерацнй 68
§ 22. Быстрота сходимости процесса итераций 72
§ 23. Решеиие систем линейных уравнений методом последовательиых приближений 74

§ 24. Решение систем нелинейных уравнений методом последовательных приближений 80
§ 25. Видоизмененное расстояние 82
§ 26. Признаки сходимости процесса последовательных приближений для систем линейных уравнений 85
§ 27. Последовательные приближения в геометрии 91
§ 28. Заключение 94
Упражнения 96
Решения 98

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании книга подверглась переработке. Метод итераций изложен теперь на основе понятия сжимающего отображения, что позволило рассказать о нем до введения понятия производной. Значительно расширена часть книги, касающаяся приближенного решения систем уравнений. Наконец, все задачи снабжены решениями.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Основной целью этой книги является изложение различных методов приближенного решения уравнений. Их практическая ценность неоспорима, однако им уделяют мало внимания как в средней, так и в высшей школе. Поэтому часто бывает так, что человек, прослушавший курс высшей математики во втузе, испытывает затруднения при необходимости решить простейшее трансцендентное уравнение. С решением уравнений сталкиваются не только инженеры, но и техники, рабочие-рационализаторы и представители многих других специальностей. Знакомство с методами приближенного решения уравнений полезно и для школьников старших классов.

Поскольку большинство методов приближенного решения уравнений связано с понятием производной, нам пришлось ввести это понятие. При этом в основу были положены наглядные геометрические соображения. Таким образом, для чтения этой книги достаточно знаний по математике в объеме девяти классов средней школы.

При составлении книги была использована лекция, прочитанная автором для школьников 9—10-х классов, занимавшихся в школьном математическом кружке при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова.

Материал этой лекции был применен учителем средней школы г. Москвы № 425 С. И. Шварцбурдом для внеклассной работы с учениками 9-х классов. Автор выражает благодарность С. И. Шварцбурду за предоставление разработанных им заданий на решение уравнений методом итераций, использованных при написании этой книги.

Автор выражает глубокую благодарность В. Г. Болтянскому, замечания которого существенно способствовали улучшению первоначального варианта рукописи.

---

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

При изучении математики в школе очень много времени затрачивается на решение уравнений и систем уравнений. Сначала это уравнения первой степени и системы таких уравнений. Потом появляются квадратные, биквадратные и иррациональные уравнения. Наконец, школьник знакомится с показательными, логарифмическими и тригонометрическими уравнениями.

Такое внимание к уравнениям не случайно. Оно объясняется важностью уравнений для приложений математики к практике. Какую бы область приложений ни взять, чаще всего для получения окончательного ответа приходится решать уравнения или системы уравнений.

При обучении в школе к уравнениям часто прибегают для решения физических задач. Рассмотрим, например, такую задачу:

В колодец брошен камень. Найти глубину колодца, если звук от падения камня услышан через T секунд после падения.

Если обозначить глубину колодца через x, то для определения x получаем уравнение

$$\sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{v}=T,$$

где v — скорость распространения звука в воздухе ($\sqrt{\frac{2x}{g}}$ — время падения камня и $\frac{x}{v}$ — время, за которое до нас дойдет звук падения). Это *иррациональное уравнение*. Полагая $\sqrt{x}=y$, сведем его к квадратному уравнению

$$\frac{y^2}{v}+\sqrt{\frac{2}{g}}\,y-T=0,$$

которое решается по известной формуле.

Уравнения применяют и для решения геометрических задач. Например, задача о делении отрезка AB длины l в среднем и крайнем отношении (то есть на такие отрезки AC и CB, что $AB : AC = AC : CB$) приводит к решению квадратного уравнения

$$x^2 + lx - l^2 = 0,$$

где через x обозначена длина отрезка AC.

К более сложному уравнению сводится задача о делении угла α на три части. Это уравнение имеет вид

$$4x^3 - 3x - \cos\alpha = 0,$$

где $x = \cos\frac{\alpha}{3}$. Такие уравнения, называемые *кубическими*, в школе не изучают, но в курсе высшей алгебры доказывают, что и для кубических уравнений есть формула решения (см. ниже формулу (3)).

Часто, однако, в физике возникают задачи, приводящие к более сложным уравнениям, для которых не только в средней школе, но и в университете не дают формул решения. Возьмем, например, железный стержень (или, как говорят техники, балку) и наглухо заделаем его концы. Если ударить по такому стержню, он будет совершать поперечные колебания. Как доказывают в математической физике, чтобы найти частоту этих колебаний, надо решить уравнение

$$e^x + e^{-x} = \frac{2}{\cos x}, \qquad (1)$$

где $e = 2{,}71828...$

В школе никаких правил для решения такого уравнения не дают. Не следует думать, что это объясняется краткостью школьной программы по математике. Формулы для решения уравнения (1) в том смысле, как это понимают в школе, вообще не существует. Уточним это утверждение.

Говорят, что для некоторого уравнения существует формула решения, если его корни можно выразить через входящие в уравнение величины при помощи арифметических операций, извлечения корней, показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических функций. В этом смысле у квадратного уравнения

$x^2 + px + q = 0$ есть формула решения, имеющая вид

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \qquad (2)$$

Есть формула и для решения кубического уравнения*)

$$x^3 + px + q = 0.$$

Она имеет вид

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \qquad (3)$$

Однако практическое применение формулы (3) наталкивается на ряд трудностей и требует использования комплексных чисел.

Существует формула и для решения уравнений четвертой степени, но настолько сложная, что мы ее не будем приводить.

Для уравнений пятой и высших степеней дело обстоит хуже. В 1826 г. норвежский математик Абель доказал**), что при $n \geqslant 5$ не существует формулы, выражающей решение алгебраического уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

при помощи арифметических операций и извлечений корней. Лишь для некоторых частных случаев алгебраических уравнений, степень которых больше четырех, могут существовать формулы решения***).

Если бы математики ограничивались изучением уравнений, допускающих точное решение, то есть решение по

---

*) К такому виду сводится любое кубическое уравнение

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

подстановкой $x + \frac{a_1}{3a_0} = y$.

**) Относительно жизни и творчества Абеля см. книгу О. Оре «Замечательный математик Нильс Хенрик Абель». Работы Абеля были продолжены французским математиком Э. Галуа, о котором написана книга Л. Инфельда «Любимец богов».

***) Об алгебраических уравнениях можно читать книги этой серии:

Курош А. Г., «Алгебраические уравнения произвольных степеней», Гостехиздат, 1951;

Шафаревич И. Р., «О решении уравнений высших степеней», Гостехиздат, 1954.

какой-то формуле, то разговоры инженеров с математиками имели бы примерно такой вид:

Инженер: При расчете сооружения я пришел к такому уравнению (показывает уравнение). Мне его надо срочно решить — через месяц я должен закончить проект сооружения.

Математик: Был бы рад помочь Вам, но для уравнений такого типа нет формулы решения.

Инженер: Не сможете ли Вы вывести эту формулу?

Математик: И пытаться не буду. Давно уже доказано, что для таких уравнений формулы решения не существует.

Надо думать, что в результате подобного разговора мнение инженера о математике и ее возможностях значительно ухудшилось бы. К счастью, такого разговора не происходит. Дело в том, что инженеру обычно и не нужна формула для решения того или иного уравнения. Ему надо получить ответ с определенной степенью точности, а будет ли ответ получен по формуле или иным путем, его не столь уже интересует. Ведь и формула нужна ему обычно лишь для того, чтобы с ее помощью вычислить ответ с необходимой степенью точности.

Представьте себе, например, что формула найдена, но по ней получился ответ в виде $x = 3 + \sqrt{13}$. Ясно, что этот ответ нельзя непосредственно использовать (вряд ли можно заказать слесарю деталь длиной $3 + \sqrt{13}$ *см*). Для практических целей надо выразить $\sqrt{13}$ в десятичной системе счисления, беря такое число десятичных знаков, какое требуется для данной практической задачи.

Таким образом, инженер будет вполне удовлетворен, если математик укажет ему тот или иной способ вычисления корня уравнения с необходимой степенью точности. В математике разработан целый ряд способов приближенного решения уравнений. Описанию некоторых из них и посвящена эта книга.

§ 2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Бóльшая часть способов приближенного решения уравнений основана на идее *последовательных приближений*. Эта идея применяется не только при решении уравнений, но и для решения ряда практических задач.

Пользуются методом последовательных приближений артиллеристы. Если они хотят поразить какую-нибудь

цель, то устанавливают соответствующим образом угломер и прицел орудия и производят выстрел. В случае промаха на основании наблюдения точки разрыва снаряда вносятся поправки в установку угломера и прицела и производится следующий выстрел. После нескольких приближений угломер и прицел устанавливаются так, что цель оказывается пораженной.

Иногда последовательные приближения нужны и для определения точки прицела. Пусть, например, ведется стрельба из зенитного орудия, находящегося в точке O, по летящему самолету (рис. 1). Если направить орудие на точку A_0, где самолет находится в данный момент, то получится промах: за время движения снаряда самолет передвинется в другую точку A_1. Зная скорости снаряда и самолета, эту точку сравнительно легко найти. Однако, если направить снаряд в точку A_1, все еще может получиться промах. Ведь в результате изменения наклона ствола орудия меняется закон движения снаряда, поэтому время, которое снаряд затратит для преодоления пути OA_0, отличается от времени, которое он тратит на преодоление пути OA_1, и в результате попадания снаряда в самолет не произойдет. Но теперь промах будет меньше, чем при прицеливании в точку A_0. Чтобы сделать его еще меньше, надо найти время, затрачиваемое снарядом для движения по пути AO_1, и найти, в какой точке окажется через это время самолет. Эта точка A_2 и будет следующим приближением для искомой точки прицеливания. После этого надо найти время, за которое снаряд окажется в точке A_2, и вычислить, в какую точку A_3 попадет за это время самолет. После нескольких приближений мы найдем с нужной степенью точности точку прицела.

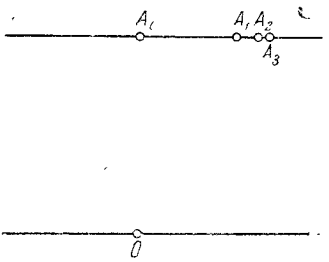


Рис. 1.

Пользуются методом последовательных приближений и для решения многих других задач.

Пусть, например, надо перевозить песок из нескольких песчаных карьеров $A_1,\ldots,A_n$ на несколько строек $B_1,\ldots,B_m$. Пусть производительность карьера A_j равна a_j тонн в

день, а потребность стройки B_k в песке равна b_k тонн в день. Наконец, пусть стоимость перевозки одной тонны песка с карьера A_j на стройку B_k равна c_{jk} (эта величина зависит от расстояния между A_j и B_k, состояния дорог и т. д.).

Для составления плана перевозок составим табл. 1. Через x_{jk} в этой таблице обозначено количество песка, которое перевозится с карьера A_j на стройку B_k.

Таблица 1

	B_1	B_2	...	B_m
A_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1m}
A_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2m}
...	...	...	...	...
A_n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nm}

Ясно, что числа x_{jk} должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$x_{j1} + x_{j2} + \ldots + x_{jm} \leqslant a_j$$

(с карьера A_j нельзя вывезти больше, чем a_j тонн песка в день),

$$x_{1k} + x_{2k} + \ldots + x_{nk} = b_k$$

(на стройку B_k надо завезти b_k тонн песка в день).

При плане, даваемом табл. 1, стоимость перевозок песка равна

$$\begin{aligned} C = {} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn}. \end{aligned} \tag{4}$$

План надо составить так, чтобы значение C было наименьшим. Для этого сначала задаются каким-то ориентировочным планом. Например, поступают следующим образом:

К карьеру A_1 прикрепляют стройку, расположенную ближе всего к нему. Если этот карьер производит больше песка, чем нужно данной стройке, прикрепляют к нему еще

одну стройку, которая наименее удалена от него среди всех оставшихся строек. После нескольких шагов производительность карьера A_1 окажется исчерпанной. После этого прикрепляют к карьеру A_2 ту из оставшихся строек, которая ближе всего расположена к нему, и т. д. В конце концов каждая стройка окажется прикрепленной к некоторому карьеру.

Однако составленный таким образом план не является наилучшим, так как под конец останется совсем немного строек и они могут быть очень удалены от оставшихся карьеров. Поэтому придется изменить составленный план. Некоторые из строек, прикрепленных к карьерам с малыми номерами, придется от них открепить и прикрепить к карьерам с бо́льшими номерами.

Методы изменения плана, приводящие к уменьшению стоимости перевозок, рассматриваются в разделе математики, называемом *линейным программированием* *).

После нескольких приближений, выполненных по этим методам, получится план, при котором сумма (4) является наименьшей или мало отличается от наименьшей.

Вообще, при составлении любого плана, расписания и т. д. сначала берут некоторое грубое приближение, которое потом последовательно улучшают, получая в конце концов требуемый результат.

Обработку детали в цехах завода также можно рассматривать как последовательное приближение к нужной форме. Сначала берут грубое приближение — отливку или какую-нибудь другую заготовку. Эту заготовку обрабатывают на станке, придавая ей форму, близкую к изготавливаемой детали. После этого ее передают на станок, работающий с большей точностью. После нескольких этапов обработки, то есть нескольких приближений, и возникает требуемая деталь.

§ 3. АХИЛЛЕС И ЧЕРЕПАХА

Впервые последовательные приближения встречаются у греческого философа Зенона Элейского, жившего за 500 лет до нашей эры. Этот философ пытался доказать, что в

*) О линейном программировании см. А. С. Солодовников, Введение в линейную алгебру и линейное программирование, «Просвещение», М., 1966.

природе не существует движения (помните, у Пушкина есть стихотворение «Движенья нет, сказал мудрец брадатый...»). Доказывал отсутствие движения Зенон таким образом: если самый быстроногий из греков — Ахиллес — попробует догнать черепаху, то он никогда этого не сможет сделать. В самом деле, пусть расстояние между Ахиллесом и черепахой 1000 шагов и пусть Ахиллес пробегает за 1 *сек* 10 шагов, а черепаха проползает 1 шаг. Через 100 *сек* Ахиллес пробежит 1000 шагов, отделявших его от черепахи. Но за это время черепаха отползет на 100 шагов. Еще через 10 *сек* Ахиллес пробежит эти 100 шагов, но черепаха уползет еще на 10 шагов вперед. Чтобы преодолеть эти 10 шагов, Ахиллес затратит еще 1 *сек*, за которую черепаха продвинется вперед на 1 шаг. Итак, черепаха все время будет впереди Ахиллеса, и он никогда не догонит черепаху. Значит, движения не существует.

Разумеется, это рассуждение Зенона — остроумный парадокс, но не более того. Движение есть неотъемлемое свойство материи. Ведь и у Пушкина стихотворение про Зенона продолжается так:

«Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не мог он возразить.
Хвалили все ответ замысловатый...»

Любой школьник без труда сосчитает, когда Ахиллес догонит черепаху. Для этого достаточно составить уравнение

$$10x - x = 1000, \tag{5}$$

где через x обозначено искомое время. Из этого уравнения получается

$$x = \frac{1000}{9}\,сек = 111\,\frac{1}{9}\,сек.$$

Рассуждения Зенона можно, однако, рассматривать как своеобразный метод приближенного решения уравнения (5).

Именно, перенесем в уравнении (5) x в правую часть и разделим обе части уравнения на 10. Мы получим уравнение

$$x = 100 + \frac{x}{10}. \tag{6}$$

Если пренебречь в правой части слагаемым $\frac{x}{10}$ (оно мало по сравнению с x), то получим для x приближенное значение

$x_1 = 100$. Теперь мы можем уточнить ответ, подставив в правую часть вместо x найденное приближение $x_1 = 100$. Мы получим более точное значение для x, а именно, $x_2 = 100 + 10 = 110$. Подставляя это значение в правую часть уравнения, найдем следующее приближение $x_3 = 100 + \frac{110}{10} = 111$. Таким путем мы получаем приближения

$$x_1 = 100,\ x_2 = 110,\ x_3 = 111,\ x_4 = 111{,}1,\ \ldots$$

то есть те же самые числа, которые получались в рассуждении Зенона. Эти числа связаны друг с другом соотношением

$$x_{n+1} = 100 + \frac{x_n}{10}, \tag{7}$$

которое позволяет вычислить их одно за другим. С увеличением n они приближаются к точному решению $x = 111\frac{1}{9}$ уравнения (5).

Описанный сейчас метод решения уравнения привел к успеху из-за того, что слагаемое $\frac{x}{10}$ было мало по сравнению с x. Иначе мы получили бы числа, не приближающиеся к искомому решению. Предположим, например, что Ахиллес состязался не с медленной черепахой, а с легконогой антилопой, пробегающей за 1 *сек* 20 шагов. Чтобы найти, через сколько времени Ахиллес догонит антилопу, надо решить уравнение

$$10x - 20x = 1000. \tag{8}$$

Его решением является $x = -100$. Это означает, что Ахиллес и антилопа были рядом 100 *сек* тому назад, а теперь антилопа обогнала Ахиллеса и расстояние между ними в дальнейшем будет только увеличиваться.

Попробуем решить уравнение (8) так же, как мы решали уравнение (5). Для этого перенесем слагаемое $20x$ в правую часть уравнения и разделим обе части уравнения на 10. Мы получим уравнение

$$x = 100 + 2x. \tag{9}$$

Положим в правой части $x_0 = 0$. Мы найдем, что $x_1 = 100$. Подставляя это значение в правую часть уравнения (9), получим следующее приближение $x_2 = 300$. Продолжая

этот процесс, получим числа

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 100, \quad x_2 = 300, \quad x_3 = 700, \ldots$$

Мы видим, что эти числа не стремятся к точному решению $x = -100$ уравнения (8).

§ 4. ДЕЛЕНИЕ НА ЭЛЕКТРОННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

Возможно, что читатель этой книги удивится — зачем было решать уравнение (5) методом последовательных приближений, когда его можно было совсем просто решить точно. Но, конечно, нас интересовало не уравнение (5), а сам метод последовательных приближений, который мы потом приложим к более сложным уравнениям.

Впрочем, надо сказать, что решение методом последовательных приближений уравнений, похожих на уравнение (5), понадобилось совсем недавно в связи с появлением быстродействующих электронных вычислительных машин. Есть некоторые модели таких машин, которые могут выполнять лишь три арифметических действия — сложение, вычитание и умножение. Кроме того, они могут делить на числа вида 2^n. Как же эти машины делят на любые числа?

Разделить число b на число a — это значит решить уравнение $ax = b$. Так как машина может умножать и делить на 2^n, то можно считать, что $1/2 \leqslant a < 1$ (в противном случае мы умножим или разделим обе части уравнения $ax = b$ на соответствующую степень числа 2). Перепишем уравнение $ax = b$ в виде

$$x = (1 - a)\, x + b. \tag{10}$$

Примем за первое приближение для числа x значение $x_1 = b$. Обозначим ошибку этого приближения через α_1, то есть предположим, что $x_1 + \alpha_1 = b/a$. Тогда из уравнения (10) получим

$$x_1 + \alpha_1 = (1 - a)\,(x_1 + \alpha_1) + b = \\ = (1 - a)\, x_1 + b + (1 - a)\, \alpha_1. \tag{11}$$

Поскольку $1/2 \leqslant a < 1$, то

$$0 < 1 - a \leqslant 1/2.$$

Так как коэффициент $1 - a$ сравнительно мал, отбросим в правой части уравнения (11) слагаемое $(1 - a)\alpha_1$, которое по крайней мере вдвое меньше, чем α_1. Мы получим

$$x_1 + \alpha_1 \approx (1 - a)\, x_1 + b.$$

Число

$$x_2 = (1 - a)\, x_1 + b$$

мы и примем за следующее приближение для x.

Обозначим через α_2 погрешность приближения x_2, то есть положим $x_2 + \alpha_2 = b/a$. Тогда из уравнения (10) получим

$$x_2 + \alpha_2 = (1 - a)\, x_2 + b + (1 - a)\, \alpha_2.$$

Отбрасывая в правой части этого равенства слагаемое $(1 - a)\,\alpha_2$, получим приближенное равенство

$$x_2 + \alpha_2 \approx (1 - a)\, x_2 + b.$$

Таким образом, в качестве следующего приближения можно взять

$$x_3 = (1 - a)\, x_2 + b.$$

Рассуждая точно так же, найдем, что следующее приближение имеет вид

$$x_4 = (1 - a) x_3 + b$$

и т. д. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, вычисляемые последовательно по формуле

$$x_{n+1} = (1 - a)\, x_n + b, \tag{12}$$

приближаются к числу b/a. Но в этой формуле используются лишь действия сложения, вычитания и умножения, а значит, машина может по ней считать.

Описанный метод деления основан, по существу, на формуле для суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Именно, мы записываем дробь b/a в виде

$$\frac{b}{a} = \frac{b}{1 - (1 - a)}.$$

Но по упомянутой формуле имеем

$$\frac{b}{1 - (1 - a)} = b + b(1 - a) + b(1 - a)^2 + \ldots +$$
$$+ b(1 - a)^{n-1} + \ldots \tag{13}$$

Обозначим через x_n сумму первых n членов этой прогрессии:

$$x_n = b + b(1-a) + \ldots + b(1-a)^{n-1}.$$

Очевидно, что

$$x_{n+1} = b + b(1-a) + \ldots + b(1-a)^n =$$
$$= b + (1-a)\,[b + b(1-a) + \ldots + b(1-a)^{n-1}] =$$
$$= b + (1-a)\,x_n.$$

Эта формула совпадает с формулой (12). Таким образом, заменяя дробь b/a приближенным значением x_n, мы заменяем бесконечную сумму в формуле (13) суммой первых n членов. При возрастании числа слагаемых n эта сумма приближается к сумме всей прогрессии (убывание прогрессии (13) вытекает из того, что $1/2 \leqslant a < 1$, и потому $0 < 1 - a \leqslant 1/2$).

§ 5. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Покажем теперь, как применяют метод последовательных приближений для извлечения квадратных корней. В школе изучают способ извлечения квадратных корней, позволяющий определять один за другим знаки искомого корня. Его тоже можно рассматривать как один из способов последовательного приближения к ответу. Однако этот способ довольно сложен и зачастую школьники механически применяют его, не вполне понимая сущность дела. Мы опишем другой способ извлечения квадратных корней, употреблявшийся уже в древнем Вавилоне задолго до нашей эры. Его применял и александрийский математик Герон. Потом этот способ был заброшен, но сейчас к нему прибегают иногда для извлечения квадратных корней на электронных вычислительных машинах.

Пусть, например, надо извлечь квадратный корень из числа 28. Выберем сначала какое-то приближенное значение этого корня, например, положим $x_1 = 5$. Погрешность этого приближенного значения обозначим через α_1, то есть положим $\sqrt{28} = 5 + \alpha_1$. Чтобы найти значение α_1, возведем обе части этого равенства в квадрат. Получим

$$28 = 25 + 10\alpha_1 + \alpha_1^2,$$

то есть

$$\alpha_1^2 + 10\alpha_1 - 3 = 0. \qquad (14)$$

Таким образом, для α_1 получилось квадратное уравнение. Если попробовать точно решить это уравнение, то получим значение $\alpha_1 = -5 \pm \sqrt{28}$. Таким образом, точное определение α_1 требует вычисления $\sqrt{28}$. Казалось бы, мы находимся в заколдованном круге: чтобы найти $\sqrt{28}$, надо сосчитать α_1, а чтобы найти α_1, надо вычислить $\sqrt{28}$.

На помощь приходит следующее соображение. Погрешность α_1 приближенного значения $x_1 = 5$ невелика, она заведомо меньше единицы. Еще меньше число α_1^2. Поэтому попробуем найти приближенное значение α_1, отбросив в равенстве (14) малое слагаемое α_1^2. При этом для α_1 получается приближенное уравнение $10\alpha_1 - 3 \approx 0$. Из него вытекает, что $\alpha_1 \approx 0{,}3$.

Итак, приближенное значение поправки α_1 найдено. Так как $\sqrt{28} = 5 + \alpha_1$, то второе приближение x_2 для $\sqrt{28}$ имеет вид

$$x_2 = 5 + 0{,}3 = 5{,}3.$$

Чтобы найти еще более точное приближение для $\sqrt{28}$, повторим описанный процесс. Именно, обозначим через α_2 погрешность значения $x_2 = 5{,}3$, то есть положим $\sqrt{28} = x_2 + \alpha_2$. Возведем обе части этого равенства в квадрат и отбросим малое слагаемое α_2^2. Мы получим, что $28 \approx x_2^2 + 2x_2\alpha_2$, и потому

$$\alpha_2 \approx \frac{28 - x_2^2}{2x_2}.$$

Это означает, что третье приближение для $\sqrt{28}$ выражается формулой

$$x_3 = x_2 + \frac{28 - x_2^2}{2x_2} = \frac{28 + x_2^2}{2x_2}.$$

Так как $x_2 = 5{,}3$, то отсюда получаем, что $x_3 = 5{,}2915\ldots$ Точно так же, исходя из приближенного значения $x_3 = 5{,}2915$, находим следующее приближение x_4, выражаемое формулой

$$x_4 = \frac{28 + x_3^2}{2x_3} = 5{,}2915\ldots$$

Вообще, если уже найдено приближенное значение x_n для $\sqrt{28}$, то следующее приближение выражается формулой

$$x_{n+1} = \frac{28 + x_n^2}{2x_n}. \qquad (15)$$

При этом каждый следующий шаг процесса приводит ко все более точным приближениям для $\sqrt{28}$. Процесс приближений останавливают, когда разность между x_{n-1} и x_n станет меньше, чем заданная точность вычисления. Например, если надо вычислить $\sqrt{28}$ с точностью до 0,0001, то достаточно взять четыре приближения и положить $\sqrt{28} = 5{,}2915$ (в самом деле, $x_3 = 5{,}2915...$ и $x_4 = 5{,}2915...$).

Совершенно так же извлекают квадратный корень из любого положительного числа. Именно, при вычислении $\sqrt{a}$ мы выбираем некоторое начальное приближение x_1, а потом определяем следующие приближения по формуле

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n^2}{2x_n}. \qquad (16)$$

Формулу (16) можно вывести и из несколько иных рассуждений, чем рассуждения, примененные при извлечении $\sqrt{28}$. Пусть мы уже нашли n-е приближение x_n для $\sqrt{a}$. Так как $\sqrt{a} = \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}}$, то $\sqrt{a}$ является средним геометрическим чисел x_n и $\frac{a}{x_n}$. В качестве приближенного значения для этого среднего геометрического возьмем среднее арифметическое чисел x_n и $\frac{a}{x_n}$, то есть положим

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}.$$

Это и есть формула (16).

Таким образом, *описанный выше способ приближенного извлечения квадратных корней заключается в том, что мы на каждом шагу приближений заменяем среднее геометрическое чисел x_n и $\frac{a}{x_n}$ их средним арифметическим.*

Выясним теперь, всегда ли процесс последовательных приближений при извлечении квадратных корней ведет к цели, то есть будет ли всегда обстоять дело так, как при погоне Ахиллеса за черепахой, или иногда дело обстоит так, как при его погоне за антилопой (в первом случае математики говорят, что процесс приближений сходится, а во втором — что он расходится). Мы докажем, что при извлечении квадратных корней никогда не бывает осложнений — процесс приближений всегда сходится, всегда ведет к цели.

Для этого сравним погрешности $\alpha_n = \sqrt{a} - x_n$ и $\alpha_{n+1} = \sqrt{a} - x_{n+1}$ двух следующих друг за другом приближений. По формуле (16) погрешность α_{n+1} можно записать в следующем виде:

$$\alpha_{n+1} = \sqrt{a} - x_{n+1} = \sqrt{a} - \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = -\frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a}{2x_n}.$$

Но

$$x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a = \left(x_n - \sqrt{a}\right)^2 = \alpha_n^2,$$

и потому

$$\alpha_{n+1} = -\frac{\alpha_n^2}{2x_n}. \tag{17}$$

Мы рассматриваем лишь положительные приближения x_n для $\sqrt{a}$. Поэтому из равенства (17) можно сделать вывод, что все погрешности $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ отрицательны. Иными словами, *все приближения x_n, начиная со второго, являются приближениями с избытком* *); первое приближение x_1 может быть как приближением с избытком, так и приближением с недостатком.

С помощью формулы (17) легко доказать, что *абсолютная величина погрешности приближенного значения x_n уменьшается с каждым шагом по крайней мере вдвое*. В самом деле, равенство (17) можно записать так:

$$\alpha_{n+1} = -\frac{\alpha_n}{2x_n}\alpha_n = \frac{x_n - \sqrt{a}}{2x_n}\alpha_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right)\alpha_n.$$

Поэтому

$$|\alpha_{n+1}| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right| |\alpha_n|. \tag{18}$$

---

*) Это объясняется тем, что среднее арифметическое всегда больше, чем среднее геометрическое.

Но так как $x_n > 0$, то

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n} < \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, как было показано выше, при $n \geqslant 2$ имеем $x_n > \sqrt{a}$ и потому

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n} > 0.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n} \right| < \frac{1}{2}. \tag{19}$$

Рассматривая соотношения (18) и (19), убеждаемся, что

$$|\alpha_{n+1}| < \frac{1}{2} |\alpha_n|.$$

Это и доказывает справедливость нашего утверждения: с каждым шагом приближений абсолютная величина погрешности уменьшается по крайней мере вдвое. Отсюда следует, что после второго шага приближений абсолютная величина погрешности уменьшится по крайней мере вчетверо, после третьего — по крайней мере в восемь раз и т. д. Ясно, что с возрастанием n абсолютная величина погрешности $\alpha_n = \sqrt{a} - x_n$ уменьшается и стремится к нулю. Но это и означает, что числа x_n при возрастании n стремятся к $\sqrt{a}$.

Разберем теперь, как влияет на ход процесса приближений выбор начального приближения x_1. В первую очередь отметим, что этот выбор никак не влияет на окончательный результат. Ведь мы уже доказали, что, как бы ни было выбрано начальное приближение x_1, погрешности $\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ дальнейших приближений при $n \to \infty$ стремятся к нулю. Таким образом, если задана необходимая точность вычислений, то при любом начальном приближении x_1 получится одно и то же значение для $\sqrt{a}$ с указанной точностью. Даже при очень неудачном выборе начального приближения мы в конце концов придем к правильному результату. После десяти шагов приближения абсолютная величина погрешности уменьшится более чем в тысячу раз ($2^{10} = 1024 \approx 1000$), а после сорока шагов —

по крайней мере в биллион (10^{12}) раз. Так, если при вычислении $\sqrt{2}$ положить $x_1 = 10^6$, то $\alpha_1 \approx 10^6$, а потому $|\alpha_{40}| < 10^{-6}$. Иными словами, в начале процесса погрешность была около миллиона, а в конце ее абсолютная величина стала меньше одной миллионной.

Тем не менее выбор начального приближения влияет на длительность процесса приближений. Если выбрать начальное приближение неудачно, то придется долго ждать, пока разность между x_{n+1} и x_n станет меньше, чем заданная точность вычислений. Хороший выбор начального приближения значительно ускоряет дело. Поэтому часто поступают так: начальное приближение x_1 берут из таблиц квадратных корней, а формулой

$$x_2 = \frac{a + x_1^2}{2x_1} \tag{20}$$

пользуются лишь для уточнения полученного значения.

Такой путь особенно удобен потому, что скорость убывания погрешности значительно возрастает, когда x_n приближается к $\sqrt{a}$. Ведь при выводе неравенства

$$|\alpha_{n+1}| < \frac{1}{2}|\alpha_n|$$

мы заменили в формуле (18) множитель $\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right|$ числом $\frac{1}{2}$. Но если x_n близко к $\sqrt{a}$, то дробь $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}$ очень мала, а потому $|\alpha_{n+1}| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right||\alpha_n|$ значительно меньше, чем $\frac{1}{2}|\alpha_n|$.

Уточним сделанное утверждение. Для этого рассмотрим наряду с абсолютной погрешностью $|\alpha_n| = |\sqrt{a} - x_n|$ относительную погрешность β_n приближенного значения x_n, то есть отношение абсолютной погрешности $|\alpha_n|$ к точному значению корня $\sqrt{a}$. Эта погрешность выражается формулой

$$\beta_n = \frac{|\alpha_n|}{\sqrt{a}} = \left|1 - \frac{x_n}{\sqrt{a}}\right|.$$

Из равенства (17) получается такая формула для величины β_{n+1}:

$$\beta_{n+1} = \frac{|\alpha_{n+1}|}{\sqrt{a}} = \frac{|\alpha_n|^2}{2x_n\sqrt{a}}.$$

Так как $x_n > \sqrt{a}$, то отсюда вытекает, что

$$\beta_{n+1} < \frac{|\alpha_n|^2}{2(\sqrt{a})^2} = \frac{1}{2}\beta_n^2.$$

Итак, для относительных погрешностей β_n приближенных значений выполняется неравенство

$$\beta_{n+1} < \frac{\beta_n^2}{2}. \qquad (21)$$

Например, если относительная погрешность приближения x_n равна 0,01, то для приближения x_{n+1} она не превосходит 0,00005, а для x_{n+2} она не превосходит 0,00000000013. Мы видим, что точность приближений возрастает все быстрее и быстрее. Можно показать, что, когда мы уже достаточно приблизились к $\sqrt{a}$, каждое следующее приближение примерно удваивает число верных знаков.

Пример. Вычислить $\sqrt{238}$ с точностью до 0,00001.

По таблицам И. Н. Бронштейна и К. А. Семендяева*) находим $\sqrt{238} = 15{,}43$. Примем число 15,43 за x_1 и найдем x_2 по формуле

$$x_2 = \frac{15{,}43^2 + 238}{30{,}86} = 15{,}42725\ldots$$

Оценим точность полученного ответа. Так как погрешность значения 15,43 не превосходит 0,01, то $\alpha_1 = 0{,}01$ и потому

$$\beta_1 \approx \frac{0{,}01}{15{,}43} < 0{,}001.$$

Но тогда

$$\beta_2 < \frac{0{,}001^2}{2} = 0{,}0000005.$$

Это означает, что абсолютная погрешность приближения x_2 не превосходит значения $15{,}43 \cdot 0{,}0000005 < 0{,}00001$. Иные-

*) И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев, «Справочник по математике», «Наука», 1965.

ми словами, в значении $\sqrt{238} = 15{,}42725...$ верны все семь знаков.

Если бы мы хотели получить четырнадцать верных знаков, то уже третье приближение дало бы нужный ответ. Однако такая точность почти никогда не бывает нужна.

Остановимся в заключение на следующей особенности метода последовательных приближений. При применении обычного метода извлечения квадратных корней любая ошибка, допущенная в каком-то месте, полностью обесценивает дальнейшие вычисления. Иначе обстоит дело при применении метода последовательных приближений. Пусть, например, в результате сделанной ошибки мы вместо правильного значения n-го приближения x_n получили неправильное значение y_n. Тогда все дальнейшие расчеты можно рассматривать как вычисление $\sqrt{a}$ при начальном приближении y_n. Но мы видели выше, что при любом выборе начального приближения метод последовательных приближений приводит в конце концов к значению $\sqrt{a}$ с нужной степенью точности. Таким образом, сделанная ошибка в дальнейшем будет стремиться к нулю. Единственное влияние, которое она окажет, состоит в том, что придется взять несколько лишних приближений.

Благодаря отмеченной особенности процесса приближений в начале расчета можно вычислять приближения с меньшей точностью и лишь для последних приближений брать заданную точность. Это сокращает время, затрачиваемое на расчет.

§ 6. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЕЙ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПО МЕТОДУ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Описанный выше метод извлечения квадратных корней можно применять и для извлечения корней с любым натуральным показателем. Для этого нам понадобится следующая формула*):

$$(x+\alpha)^k = x^k + kx^{k-1}\alpha + \ldots, \tag{22}$$

*) Эта формула вытекает из бинома Ньютона, но мы не предполагаем знакомства читателя с формулой бинома.

где точками обозначены члены, содержащие α^2, α^3 и т. д.

Докажем эту формулу. Из школьного курса известно, что

$$(x+\alpha)^2 = x^2 + 2x\alpha + \alpha^2,$$
$$(x+\alpha)^3 = x^3 + 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 + \alpha^3.$$

Эти равенства можно переписать следующим образом:

$$(x+\alpha)^2 = x^2 + 2x\alpha + \ldots, \qquad (23)$$
$$(x+\alpha)^3 = x^3 + 3x^2\alpha + \ldots \qquad (24)$$

Таким образом, формула (22) доказана при $k = 2$ и $k = 3$. Умножим теперь обе части формулы (24) на $x + \alpha$. Мы получим, что

$$(x+\alpha)^4 = (x^3 + 3x^2\alpha + \ldots)\ (x+\alpha).$$

Если раскрыть в этом выражении скобки, то получится одно слагаемое x^4, не содержащее α, и два слагаемых $3x^3\alpha$ и $x^3\alpha$, содержащих α в первой степени; что же касается остальных слагаемых, то они содержат α во второй и высших степенях. Поэтому можно написать, что

$$(x+\alpha)^4 = x^4 + 3x^3\alpha + x^3\alpha + \ldots = x^4 + 4x^3\alpha + \ldots \qquad (25)$$

(как и выше, точками обозначены члены, содержащие α^2, α^3 и т. д.)

Итак, формула (22) доказана и при $k = 4$. Точно так же из формулы (25) выводится, что

$$(x+\alpha)^5 = x^5 + 5x^4\alpha + \ldots \qquad (26)$$

Очевидно, что таким путем можно доказать формулу (22) для любого целого положительного показателя k.

Вернемся теперь к извлечению корня любой натуральной степени k. Предположим, что уже найдено какое-то приближение x_1 для искомого корня $\sqrt[k]{a}$. Обозначим через α_1 погрешность этого приближения, то есть предположим, что $x_1 + \alpha_1 = \sqrt[k]{a}$. Тогда $(x_1 + \alpha_1)^k = a$. Но по формуле (22) это равенство можно записать в следующем виде:

$$x_1^k + kx_1^{k-1}\alpha_1 + \ldots = a,$$

где точками обозначены члены, содержащие α_1^2, α_1^3 и т. д.

Если выбранное приближение x_1 было достаточно близко к $\sqrt[k]{a}$, то погрешность α_1 этого приближения мала, и потому можно пренебречь членами, содержащими высшие степени погрешности. Мы получаем, таким образом, приближенное равенство

$$x_1^k + kx_1^{k-1}\alpha_1 \approx a.$$

Из этого равенства вытекает, что

$$\alpha_1 \approx \frac{a - x_1^k}{kx_1^{k-1}},$$

и потому в качестве следующего приближения для $\sqrt[k]{a}$ можно принять число

$$x_2 = x_1 + \frac{a - x_1^k}{kx_1^{k-1}} = \frac{a + (k-1)\,x_1^k}{kx_1^{k-1}}.$$

Точно так же, исходя из приближения x_2, находим следующее приближение:

$$x_3 = \frac{a + (k-1)\,x_2^k}{kx_2^{k-1}}.$$

Вообще, если найдено приближение x_n для $\sqrt[k]{a}$, то следующее приближение определяется формулой

$$x_{n+1} = \frac{a + (k-1)\,x_n^k}{kx_n^{k-1}}. \qquad (27)$$

Как и при извлечении квадратных корней, можно показать, что указанный процесс сходится при любом выборе начального приближения x_1 (лишь бы это приближение было положительным числом). Иными словами, числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ при любом выборе x_1 приближаются к $\sqrt[k]{a}$. Процесс приближений ведется до тех пор, пока числа x_n и x_{n+1} не совпадут в пределах заданной точности.

Пример. Найти значение $\sqrt[3]{970}$ с точностью до 0,001. При $k = 3$ формула приближений (27) принимает вид

$$x_{n+1} = \frac{a + 2x_n^3}{3x_n^2}. \qquad (28)$$

В нашем случае $a = 970$. Положим $x_1 = 10$. Из формулы (28) следует, что

$$x_2 = \frac{970 + 2 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^2} = \frac{2970}{300} = 9{,}900,$$

$$x_3 = \frac{970 + 2 \cdot 9{,}9^3}{3 \cdot 9{,}9^2} = \frac{2910{,}60}{294{,}03} = 9{,}899.$$

Мы видим, что в пределах заданной точности значения x_2 и x_3 совпадают. Поэтому с точностью до 0,001 имеем

$$\sqrt[3]{970} = 9{,}899.$$

§ 7. МЕТОД ИТЕРАЦИЙ

Все разобранные выше примеры являются частными случаями применения одного общего способа решения уравнений. Этот способ называют *методом итераций* или *методом последовательных приближений*. Сущность этого способа состоит в следующем.

Уравнение $f(x) = 0$, которое хотят решить, переписывают в виде

$$x = \varphi(x). \tag{29}$$

После этого выбирают начальное приближение x_1 и подставляют в правую часть уравнения (29). Полученное значение $x_2 = \varphi(x_1)$ принимают за второе приближение для корня. Вообще, если найдено приближение x_n, то следующее приближение x_{n+1} определяют по формуле

$$x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

Пусть после нескольких приближений мы получим, что с заданной степенью точности выполняется равенство $x_n \approx x_{n+1}$. Так как $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, то это значит, что с заданной точностью выполняется равенство $x_n \approx \varphi(x_n)$, то есть что x_n — приближенное значение корня уравнения $x = \varphi(x)$.

Например, решая задачу об Ахиллесе и черепахе, мы записали уравнение

$$10\,x - x = 1000$$

в виде

$$x = 100 + \frac{x}{10}$$

и искали приближения по формуле

$$x_{n+1} = 100 + \frac{x_n}{10}.$$

В задаче о делении на электронной вычислительной машине мы записали уравнение

$$ax = b$$

в виде

$$x = (1 - a)\ x + b$$

и искали приближения по формуле

$$x_{n+1} = (1 - a)x_n + b.$$

Наконец, при извлечении корня k-й степени мы преобразовали уравнение

$$x^k = a$$

к виду

$$x = \frac{a + (k - 1)\ x^k}{kx^{k-1}},$$

после чего искали приближения по формуле

$$x_{n+1} = \frac{a + (k - 1)\ x_n^k}{kx_n^{k-1}}.$$

Приведем пример более сложного уравнения, решаемого методом итераций.

Пример. Решить уравнение

$$10x - 1 - \cos\ x = 0 \tag{30}$$

с точностью до 0,001.

Перепишем уравнение (30) в следующем виде:

$$x = \frac{1 + \cos x}{10}. \tag{31}$$

Выберем некоторое начальное приближение, например $x_1 = 0$, и подставим его в правую часть равенства (31). Полученное значение

$$x_2 = \frac{1 + \cos 0}{10} = 0{,}2$$

примем за второе приближение искомого корня. Подставляя значение x_2 в правую часть равенства (31), получим третье приближение

$$x_3 = \frac{1 + \cos 0{,}2}{10} \approx \frac{1 + 0{,}98}{10} = 0{,}198.$$

Далее, находим

$$x_4 = \frac{1 + \cos 0{,}198}{10} \approx 0{,}198.$$

Мы видим, что с точностью до 0,001 выполняется равенство $x_3 = x_4$. Так как $x_4 = \frac{1 + \cos x_3}{10}$, то это означает, что с точностью до 0,001 число $x_3 = 0{,}198$ является корнем уравнения $x = \frac{1 + \cos x}{10}$.

В связи с описанным способом итерации возникает ряд вопросов:

1. Всегда ли последовательность $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, получаемая по способу итераций, сходится к некоторому числу ξ?

2. Если имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, то является ли число ξ решением уравнения $x = \varphi(x)$?

3. Как быстро приближаются числа $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ к корню ξ уравнения $x = \varphi(x)$?

Легче всего ответить на второй вопрос. Пусть числа $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ приближаются к числу ξ. Рассмотрим равенство $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, дающее выражение следующего приближения через предыдущее. С увеличением n его левая часть приближается к ξ, а правая часть — к $\varphi(\xi)$ *). Поэтому в пределе мы и получим $\xi = \varphi(\xi)$, то есть ξ является корнем уравнения $x = \varphi(x)$.

На первый вопрос ответ отрицательный. В самом деле, рассмотрим, например, уравнение

$$x = 10^x - 2.$$

Если положить $x_1 = 1$, то мы получим

$$x_2 = 8,\ x_2 = 10^8 - 2,\ \ldots$$

С увеличением n числа x_n увеличиваются и не стремятся ни к какому пределу. В то же время, если переписать уравне-

*) Мы предполагаем, что $\varphi(x)$ непрерывная функция.

ние в виде $x = \lg(x + 2)$, то процесс приближений будет сходиться, и мы получим после трех приближений, что $x = 2{,}38$.

Таким образом, надо заменить первый вопрос таким:

Какой должна быть функция $\varphi(x)$, чтобы последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ сходилась?

Выяснению этого вопроса предпошлем геометрическое истолкование способа итераций.

§ 8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ

Очевидно, что разыскание корня ξ уравнения $x = \varphi(x)$ есть не что иное, как нахождение абсциссы точки M пересечения кривой $y = \varphi(x)$ с прямой $y = x$. Предположим, что задано некоторое начальное значение x_1 (рис. 2). Тогда

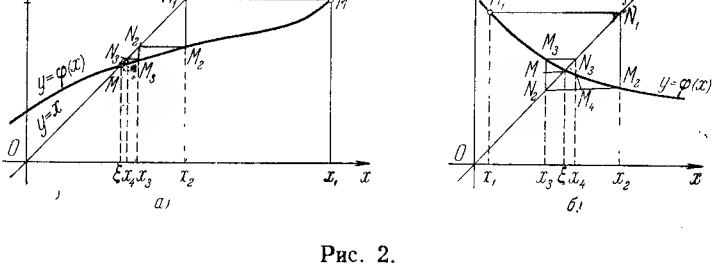


Рис. 2.

точка M_1 с координатами $M_1(x_1, \varphi(x_1))$ лежит на кривой $y = \varphi(x)$. Проведем через эту точку горизонтальную прямую. Она пересечет прямую $y = x$ в точке $N_1(\varphi(x_1), \varphi(x_1))$. Обозначим $\varphi(x_1)$ через x_2. Тогда координаты точки N_1 будут иметь вид $N_1(x_2, x_2)$. Далее, проведем через точку N_1 вертикальную прямую. Она пересечет кривую $y = \varphi(x)$ в точке M_2 с координатами $M_2(x_2, \varphi(x_2))$. Повторяя этот процесс, мы получаем точку N_2 на прямой $y = x$ с координатами $N_2(x_3, x_3)$, где $x_3 = \varphi(x_2)$, а потом точку M_3 на кривой $y = \varphi(x)$ с координатами $M_3(x_3, \varphi(x_3))$ и т. д. Если процесс приближений сходится, то точки $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ приближаются к искомой точке пересечения.

Таким образом, геометрический смысл способа последовательных приближений заключается в том, что мы двигаемся к искомой точке пересечения кривой и прямой по ломаной линии, вершины которой попеременно лежат на кривой и на прямой, а стороны попеременно имеют горизонтальное и вертикальное направления (рис. 2, *а*).

Если кривая и прямая расположены так, как на рис. 2, *а*, то эта ломаная напоминает лестницу. Если же кривая и прямая расположены так, как на рис. 2, *б*, то ломаная напоминает спираль.

Описанный процесс приближений может и расходиться, не приводить ни к какому результату (как и было, когда

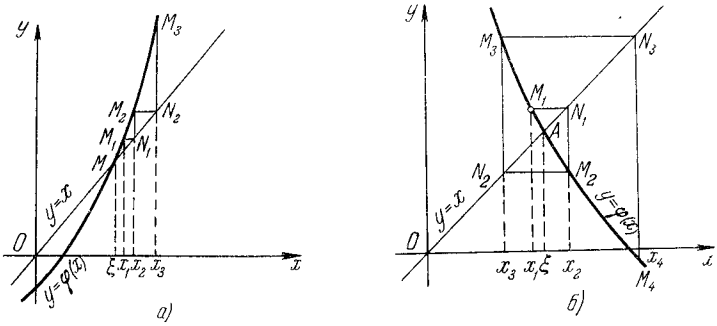


Рис. 3.

мы решали задачу про Ахиллеса и антилопу). Графически это означает, что ступени лестницы (или звенья спирали) становятся все больше и больше, а потому точки $M_1, \ldots$ $\ldots, M_n, \ldots$ не приближаются к точке M, а удаляются от нее (рис. 3).

Различие между рис. 2 и 3 состоит в следующем. Проведем через точку M пересечения прямой $y = x$ и кривой $y = \varphi(x)$ прямую под углом 135° к оси абсцисс. Эта прямая вместе с прямой $y = x$ делит плоскость на четыре части. Если кривая в некоторой окрестности точки M расположена в левой и правой четвертях плоскости и начальное приближение берется в этой окрестности, то процесс итераций сходится. Если же кривая расположена в верхней и нижней четвертях плоскости, то процесс приближений расходится.

Однако чтобы применить это правило, надо сначала сделать набросок графика функции $y = \varphi(x)$, а это не всегда целесообразно. Поэтому надо установить другой признак сходимости процесса итераций, позволяющий решать вопрос о сходимости или расходимости аналитически, при помощи вычислений, а не геометрических построений. Это условие будет дано в § 10. Сначала нам нужно будет познакомиться с понятием сжимающего отображения.

§ 9. СЖИМАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Возьмем функцию $y = \varphi(x)$, заданную на отрезке $[a, b]$. Каждой точке x_0 этого отрезка соответствует точка y_0 на оси ординат, а именно, точка $y_0 = \varphi(x_0)$. Чтобы построить

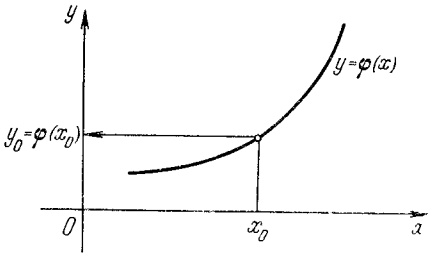


Рис. 4.

эту точку, надо провести через точку x_0 оси абсцисс вертикальную прямую до пересечения с графиком функции $y = \varphi(x)$, а потом через точку пересечения провести горизонтальную прямую до пересечения с осью ординат (рис. 4). Таким образом, функция $y = \varphi(x)$ задает отображение отрезка $[a, b]$ в ось ординат. Множество всех точек оси ординат, соответствующих точкам отрезка $[a, b]$, называют *образом* этого отрезка. Например, образом отрезка $[2, 5]$ при отображении $y = x^2$ является отрезок $[4, 25]$, а образом отрезка $[-1, 6]$ при том же отображении — отрезок $[0, 36]$ (нарисуйте график функции $y = x^2$). Можно доказать, что если функция $y = \varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то образом этого отрезка является отрезок оси ординат. В случае, когда функция $y = \varphi(x)$, кроме того, монотонно возрастает, образом отрезка $[a, b]$ является отрезок

$[\varphi(a), \varphi(b)]$, а в случае, когда она монотонно убывает,— отрезок $[\varphi(b), \varphi(a)]$ (рис. 5).

Вместо отображения отрезка $[a, b]$ в ось ординат можно рассматривать его отображение в ось абсцисс. Для этого после отображения в ось ординат повернем ось ординат на 90° по часовой стрелке. В результате точки отрезка $[a, b]$ сначала отобразятся в какие-то точки оси ординат, а потом — в точки оси абсцисс. Таким образом, функция $\varphi(x)$

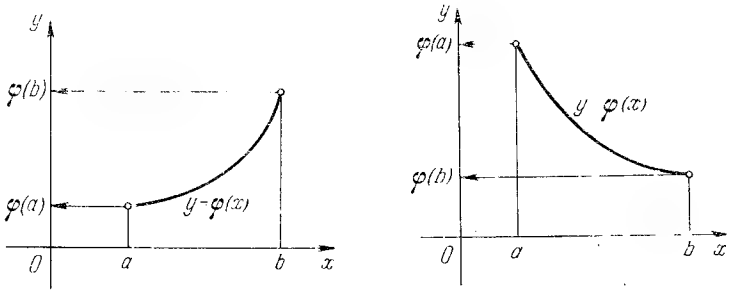


Рис. 5.

задает отображение отрезка $[a, b]$ в ось абсцисс. Это отображение мы будем записывать так: $x \to \varphi(x)$. Если функция $\varphi(x)$ непрерывна, то в результате получим какой-то отрезок оси абсцисс.

Может случиться, что образ $[a_1, b_1]$ отрезка $[a, b]$ является частью $[a, b]$. Например, при отображении $y = \sqrt{x} + 1$ отрезок $[0, 4]$ переходит в свою часть $[1, 3]$. Мы будем говорить в таком случае, что отображение $\varphi(x)$ переводит отрезок $[a, b]$ в свою часть. Если $\varphi(x)$ переводит отрезок $[a, b]$ в свою часть $[a_1, b_1]$, то любая часть отрезка $[a, b]$ переходит в часть отрезка $[a_1, b_1]$. В частности, сам отрезок $[a_1, b_1]$ переходит при отображении $\varphi(x)$ в свою часть $[a_2, b_2]$. Точно так же отрезок $[a_2, b_2]$ переходит при этом отображении в свою часть $[a_3, b_3]$ и т. д. В результате мы получим систему отрезков

$$[a, b], [a_1, b_1,], \ldots, [a_n, b_n], \ldots,$$

каждый из которых является частью предыдущего и таких, что $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ является образом $[a_n, b_n]$ при отображении $\varphi(x)$.

Например, отображение $x \to 1 - \frac{1}{x+2}$ переводит отрезок $[0, 4]$ в его часть $[{}^1/_2, {}^5/_6]$. Применяя это отображение к отрезку $[{}^1/_2, {}^5/_6]$, получим отрезок $[{}^3/_5, {}^{11}/_{17}]$ и т. д. Каждый следующий отрезок является частью предыдущего.

Возможны два случая: либо существует отрезок $[c, d]$, принадлежащий всем отрезкам $[a_n, b_n]$, либо эти отрезки имеют лишь одну общую точку ξ. В последнем случае говорят, что система отрезков $[a_n, b_n]$ *стягивается к точке* ξ.

Ниже мы сформулируем условие стягивания системы отрезков $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, ..., $[a_n, b_n]$,... Для этого введем важное понятие сжимающего отображения. Отображение $\varphi(x)$, переводящее отрезок $[a, b]$ в свою часть $[a_1, b_1]$, называется *сжимающим*, если оно уменьшает расстояние между любыми двумя точками этого отрезка по крайней мере в M раз, где $M > 1$. Так как расстояние между точками x_1 и x_2 равно $|x_2 - x_1|$, то условие сжимания можно сформулировать так:

Существует число q такое, что $0 < q < 1$ и для любых двух точек x_1, x_2 отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| < q\,|x_2 - x_1| \tag{32}$$

(здесь $q = 1/M$).

Длина произвольной части $[c, d]$ отрезка $[a, b]$ при сжимающем отображении $\varphi(x)$ уменьшается по крайней мере в $M = 1/q$ раз. В самом деле, пусть $[c_1, d_1]$ — образ отрезка $[c, d]$. Тогда c_1 и d_1 — образы некоторых точек x_1 и x_2 отрезка $[c, d]$,

$$c_1 = \varphi(x_1), \quad d_1 = \varphi(x_2).$$

Но тогда

$$|d_1 - c_1| = |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leqslant q\,|x_2 - x_1|.$$

Так как точки x_1 и x_2 лежат на отрезке $[c, d]$, то их расстояние $|x_2 - x_1|$ меньше длины $|d - c|$ отрезка $[c, d]$. Значит,

$$|d_1 - c_1| \leqslant q\,|d - c|.$$

Наше утверждение доказано.

Теперь мы можем сформулировать условие того, что система отрезков $[a_1, b_1]$, ..., $[a_n, b_n]$, получающихся из отрезка $[a, b]$ последовательным применением отображения $\varphi(x)$, стягивается.

Если отображение $\varphi(x)$, *переводящее отрезок* $[a, b]$ *в свою часть* $[a_1, b_1]$, *сжимает этот отрезок, то система отрезков* $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ *стягивается к некоторой точке* ξ *отрезка* $[a, b]$.

В самом деле, так как отображение $\varphi(x)$ стягивающее, то для любого n

$$|b_n - a_n| \leqslant q\,|b_{n-1} - a_{n-1}|.$$

Точно так же

$$|b_{n-1} - a_{n-1}| \leqslant q\,|b_{n-2} - a_{n-2}|.$$

Но тогда

$$|b_n - a_n| \leqslant q^2\,|b_{n-2} - a_{n-2}|.$$

Повторяя это рассуждение, получаем

$$|b_n - a_n| \leqslant q^n |b - a|.$$

Поскольку $0 < q < 1$, то последовательность чисел q, $q^2, \ldots, q^n, \ldots$ стремится к нулю, а потому длины $|b_n - a_n|$ отрезков $[a_n, b_n]$ стремятся к нулю, когда n стремится к бесконечности. Но тогда не может быть отрезка $[c, d]$, принадлежащего всем отрезкам $[a_n, b_n]$. Следовательно, система отрезков

$$[a, b], [a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

стягивается.

В заключение рассмотрим отображения $\varphi(x)$, для которых неравенство (32)

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| < q|x_2 - x_1|,$$

где $0 < q < 1$, выполняется для любой пары чисел x_1 и x_2. Эти отображения являются сжимающими на всей числовой оси. Покажем, что в таком случае есть отрезок, который сжимается отображением $\varphi(x)$. Поскольку для любых двух точек x_1 и x_2 условие (32) выполнено, достаточно показать, что есть отрезок, который переводится в себя отображением $\varphi(x)$. Возьмем любое число a и положим $b = \varphi(a)$. Выберем число $q_1 < 1$ такое, что $q < q_1$.

Положим

$$R = \frac{|b - a|}{1 - q_1}$$

и покажем, что отрезок $[a - R, a + R]$ переходит при отображении $\varphi(x)$ в свою часть. В самом деле, пусть x — точ-

ка этого отрезка. Тогда $|x - a| < R$. В силу неравенства (32) выводим, что

$$|\varphi(x) - b| = |\varphi(x) - \varphi(a)| < q|x - a| \leqslant qR.$$

Но тогда

$$|\varphi(x) - a| = |\varphi(x) - b + b - a| \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi(x) - b| + |b - a| \leqslant qR + |b - a| = qR + (1 - q_1)R =$$
$$= (1 + q - q_1)R < R.$$

Это и показывает, что любая точка отрезка $[a - R, a + R]$ переходит при отображении $\varphi(x)$ в точку того же отрезка, а потому отображение $\varphi(x)$ сжимает отрезок $[a - R, a + R]$.

§ 10. СЖИМАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И МЕТОД ИТЕРАЦИЙ

Вернемся теперь к методу итераций. Этот метод применяется для решения уравнений вида $x = \varphi(x)$. Если ξ — корень этого уравнения, $\xi = \varphi(\xi)$, то при отображении $x \to \varphi(x)$ точка ξ остается на месте. Таким образом, задача о решении уравнения $x = \varphi(x)$ равносильна задаче об отыскании неподвижных точек отображения $\varphi(x)$.

Если отображение $\varphi(x)$ является сжимающим на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке всегда есть неподвижная точка. Чтобы убедиться в этом, возьмем последовательность отрезков

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots,$$

получающихся из $[a, b]$ последовательным применением отображения $\varphi(x)$. Так как $\varphi(x)$ — сжимающее отображение отрезка $[a, b]$, то существует единственная точка ξ, общая всем отрезкам $[a_n, b_n]$. Она и является неподвижной точкой отображения $\varphi(x)$.

В самом деле, отображение $\varphi(x)$ переводит каждый отрезок $[a_n, b_n]$ в свою часть $[a_{n+1}, b_{n+1}]$. Поэтому образ $\varphi(x)$ любой точки c отрезка $[a_n, b_n]$ лежит на его части $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, а тем более на самом отрезке $[a_n, b_n]$. Поскольку точка ξ принадлежит всем отрезкам $[a_n, b_n]$, то и ее образ $\varphi(\xi)$ должен принадлежать всем этим отрезкам. Но единственной точкой, принадлежащей всем отрезкам $[a_n, b_n]$, является точка ξ. Значит, $\varphi(\xi) = \xi$, то есть ξ — неподвижная точка отображения $\varphi(x)$.

Итак, для отображений, сжимающих отрезок $[a, b]$, всегда существует неподвижная точка, лежащая на том же

отрезке. Эта точка единственная. В самом деле, если бы нашлась другая неподвижная точка η, $\eta = \varphi(\eta)$, то должно было бы выполняться неравенство

$$|\eta - \xi| = |\varphi(\eta) - \varphi(\xi)| < q\,|\eta - \xi|.$$

Поскольку $0 < q < 1$, это неравенство может выполняться лишь, если $|\eta - \xi| = 0$, то есть если $\eta = \xi$.

Теперь мы можем сформулировать достаточное условие сходимости процесса итераций.

Пусть функция $\varphi(x)$ задает сжимающее отображение отрезка $[a, b]$. Тогда для любой точки x_0 этого отрезка последовательность чисел $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, где $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, сходится к корню ξ уравнения $x = \varphi(x)$, лежащему на этом отрезке.

В самом деле, пусть $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, — последовательность отрезков, получающихся из $[a, b]$ последовательным применением отображения $\varphi(x)$. Так как точка x_0 лежит на отрезке $[a, b]$, то ее образ $x_1 = \varphi(x_0)$ лежит на отрезке $[a_1, b_1]$, образ $x_2 = \varphi(x_1)$ точки x_1 лежит на отрезке $[a_2, b_2]$ и т. д. Таким образом, для любого n точка x_n лежит на отрезке $[a_n, b_n]$. Так как длины отрезков $[a_n, b_n]$ стремятся к нулю при возрастании n, то последовательность точек $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ стремится к общей точке ξ этих отрезков.

Проведенное рассуждение показывает, что за начальную точку x_0 можно брать любую точку отрезка $[a, b]$.

Выясним, с какой скоростью стремятся точки $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ к точке ξ. Так как $\xi = \varphi(\xi)$, то для любой точки c отрезка $[a, b]$ имеем

$$|\varphi(c) - \xi| = |\varphi(c) - \varphi(\xi)| < q\,|c - \xi|. \qquad (33)$$

Применим неравенство (33) к точкам $x_0, \ldots, x_n, \ldots$ Так как $x_n = \varphi(x_{n-1})$, то

$$|x_n - \xi| = |\varphi(x_{n-1}) - \xi| < q\,|x_{n-1} - \xi|.$$

Но тогда для любого n имеем

$$|x_n - \xi| < q\,|x_{n-1} - \xi| < q^2\,|x_{n-2} - \xi| < \ldots < q^n\,|x_0 - \xi|.$$

Таким образом, *погрешность $|x_n - \xi|$ убывает с ростом n по крайней мере со скоростью геометрической прогрессии, имеющей знаменатель q.*

Приведем примеры на применение доказанного условия.

Пример 1. Можно ли применять метод итераций для решения уравнения

$$x = \frac{1}{4 + x^2}? \tag{34}$$

В данном случае

$$\varphi(x) = \frac{1}{4 + x^2}.$$

Для любых x_1 и x_2 имеем

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = \left|\frac{1}{4 + x_2^2} - \frac{1}{4 + x_1^2}\right| =$$

$$= \frac{|x_1^2 - x_2^2|}{(4 + x_2^2)(4 + x_1^2)} = \frac{|x_1 + x_2|}{|4 + x_1^2||4 + x_2^2|}|x_2 - x_1|.$$

Но по неравенству между средними арифметическим и геометрическим

$$|x| = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2} \leqslant \frac{4 + x^2}{4}.$$

Поэтому

$$|x_1 + x_2| \leqslant |x_1| + |x_2| \leqslant \frac{(4 + x_1^2) + (4 + x_2^2)}{4} =$$

$$= 2 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} \leqslant 2 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + \frac{x_1^2 x_2^2}{8} =$$

$$= \frac{1}{8}(4 + x_1^2)(4 + x_2^2).$$

Мы доказали, что для любых x_1 и x_2 выполняется неравенство

$$\frac{x_1 + x_2}{(4 + x_1^2)(4 + x_2^2)} \leqslant \frac{1}{8},$$

а потому

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leqslant \frac{1}{8}|x_2 - x_1|.$$

Это означает, что отображение $\varphi(x)$ является сжимающим на всей оси.

Мы уже знаем, что в этом случае есть отрезок, переходящий в себя при этом отображении. Чтобы найти его, положим $a = 0$. При отображении $\varphi(x)$ точка $a = 0$ переходит в точку $b = 1/4$. Далее, в нашем случае $q = 1/8$. Положим $q_1 = 1/4$ и обозначим число $\frac{|b - a|}{1 - q_1} = \frac{1}{3}$ через R. Отрезок $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ переходит при отображении $\varphi(x)$ в себя.

Значит, на этом отрезке есть одна неподвижная точка, то есть корень уравнения (34). Чтобы найти эту точку, возьмем любую точку отрезка $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$, например точку $x_0 = 0$. Применяя метод итераций, получаем

$$x_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25,$$

$$x_2 = \frac{1}{4 + 0{,}25^2} = \frac{1}{4{,}0625} = 0{,}2461,$$

$$x_3 = \frac{1}{4 + 0{,}2461^2} = \frac{1}{4{,}0605} = 0{,}2463,$$

$$x_4 = \frac{1}{4 + 0{,}2463^2} = \frac{1}{4{,}0605} = 0{,}2463.$$

С точностью до 0,0001 имеем $x_3 = x_4$. Значит, с точностью до 0,0001 корень уравнения (34), лежащий на отрезке $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$, равен 0,2463. Поскольку отображение $\varphi(x)$ сжимающее на всей оси, уравнение (34) не имеет других корней.

Пример 2. Можно ли применить метод последовательных приближений для решения уравнения

$$x = 1 + \sqrt[3]{x}$$

на отрезке $[-1, 8]$?

Здесь $\varphi(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$. Так как $\varphi(-1) = 0$, $\varphi(8) = 3$, то отображение $\varphi(x)$ переводит отрезок $[-1, 8]$ в себя. Однако оно не является на этом отрезке сжимающим, так как, например, при $x_1 = -0{,}008$, $x_2 = 0{,}008$

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = \left|\sqrt[3]{0{,}008} - \sqrt[3]{-0{,}008}\right| = 0{,}4 > |x_2 - x_1|.$$

При доказательстве того, что отображение в примере 1 было сжимающим, мы использовали неравенство $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$. Сейчас мы выведем некоторые неравенства, которые часто приходится использовать для доказательства того, что данное отображение сжимающее.

Докажем, что при $x > 0$ имеет место неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \tag{35}$$

Для этого заметим, что на рис. 6 площадь S_{OAB} сектора OAB с центральным углом x заключена между площадями треугольников OAB и OAT:

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сект. } OAB} < S_{\triangle OAT}.$$

Но

$$S_{\Delta OAB} = \frac{R^2 \sin x}{2}, \quad S_{\Delta OAT} = \frac{R^2 \operatorname{tg} x}{2}$$

(R — радиус круга). Площадь же сектора OAB равна $\frac{R^2 x}{2}$ (угол мы измеряем в радианной мере). Поэтому

$$\frac{R^2 \sin x}{2} < \frac{R^2 x}{2} < \frac{R^2 \operatorname{tg} x}{2}.$$

Сокращая на $\frac{R^2}{2}$, приходим к неравенству (35). Из неравенства (35) вытекает, что при $0 < x < 1$ имеем

$$x < \arcsin x,$$

а при $x > 0$ имеем

$$x > \operatorname{arctg} x.$$

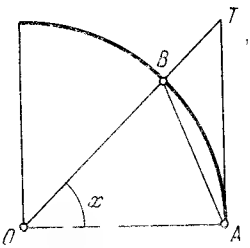


Рис. 6.

Отметим еще неравенства

$$e^x > 1 + x, \qquad x > 0,$$
$$\ln(1 + x) < x, \quad 0 < x < 1,$$

доказательство которых несколько сложнее.

Пример 3. Выяснить, можно ли решить методом итераций уравнение

$$x = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x. \tag{36}$$

Так как при всех значениях x имеем $1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x > 0$, то уравнение может иметь лишь положительные корни. Мы имеем

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x. \tag{37}$$

Поэтому

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = \left|\left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x_2\right) - \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x_1\right)\right| =$$
$$= \frac{1}{2} |\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1|.$$

Но при $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$

$$\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1 = \operatorname{arctg} \frac{x_2 - x_1}{1 + x_1 x_2}$$

и потому

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = \frac{1}{2} \left|\operatorname{arctg} \frac{x_2 - x_1}{1 + x_1 x_2}\right| < \frac{1}{2} \left|\frac{x_2 - x_1}{1 + x_1 x_2}\right| < \frac{1}{2} |x_2 - x_1|.$$

Значит, отображение (37) является сжимающим на полуоси $[0, \infty)$. Это отображение переводит отрезок $[0, \sqrt{3}]$ в свою часть $[1, 1 + \pi/6]$. Поэтому существует единственный корень уравнения (36), лежащий на отрезке $[1, 1 + \pi/6]$. Чтобы найти этот корень, положим $x_1 = 1$. Тогда

$$x_2 = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 = 1 + \frac{\pi}{8} \simeq 1{,}39,$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1{,}39 = 1{,}474,$$

$$x_4 = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1{,}474 = 1{,}487,$$

$$x_5 = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1{,}487 = 1{,}489,$$

$$x_6 = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1{,}489 = 1{,}490,$$

$$x_7 = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1{,}490 = 1{,}490.$$

Мы видим, что с точностью до 0,001 выполняется равенство $x_6 = x_7 = 1{,}490$. Значит, с этой точностью корень нашего уравнения равен 1,490. Так как отображение $\varphi(x)$ является сжимающим на всей полуоси, $0 \leqslant x < \infty$, то уравнение (36) не имеет других корней.

Часто бывает, что уравнение $x = \varphi(x)$, которое нельзя решить методом итераций, можно преобразовать к виду, допускающему применение этого метода. Возьмем, например, уравнение

$$x = x^3 - 2. \tag{38}$$

Так как здесь

$$\varphi(1) = -1 < 1, \quad \varphi(2) = 6 > 2,$$

то это уравнение имеет корень на отрезке $[1, 2]$. Но отображение $x^3 - 2$ не является сжимающим на этом отрезке, так как не отображает его в свою часть. Перепишем уравнение (38) в виде

$$x = \sqrt[3]{x + 2}.$$

Здесь $\psi(x) = \sqrt[3]{x + 2}$ и потому

$$|\psi(x_2) - \psi(x_1)| = \left|\sqrt[3]{x_2 + 2} - \sqrt[3]{x_1 + 2}\right| =$$

$$= \left|\frac{x_2 - x_1}{\sqrt[3]{(x_2 + 2)^2} + \sqrt[3]{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} + \sqrt[3]{(x_1 + 2)^2}}\right|.$$

На отрезке [1, 2] имеем $x_1 \geqslant 1$, $x_2 \geqslant 1$. Значит, на этом отрезке

$$|\psi(x_2) - \psi(x_1)| \leqslant \frac{1}{3\sqrt[3]{9}} |x_2 - x_1|.$$

Мы доказали, что отображение $\psi(x)$ — сжимающее на отрезке [1, 2]. Положим $x_1 = 1$ и применим метод итераций. Мы получим

$$x_2 = \sqrt[3]{3} = 1{,}442,$$
$$x_3 = \sqrt[3]{3{,}442} = 1{,}510,$$
$$x_4 = \sqrt[3]{3{,}510} = 1{,}520,$$
$$x_5 = \sqrt[3]{3{,}520} = 1{,}521,$$
$$x_6 = \sqrt[3]{3{,}521} = 1{,}521.$$

Итак, с точностью до 0,001 корнем уравнения (38), лежащим на отрезке [1, 2], является 1,521. Других корней это уравнение не имеет.

Мы видим, что удачное преобразование исходного уравнения привело его к виду, допускающему применение метода итераций.

Описанный здесь признак сходимости метода итераций не очень удобен для использования, так как требует доказательства довольно сложных неравенств. Ниже (в § 21) мы познакомимся с одним следствием этого признака, которое значительно облегчает доказательство сходимости процесса итераций.

§ 11. СПОСОБ ХОРД

Метод итераций является одним из самых общих методов приближенного решения уравнений. Многие другие способы приближенного решения уравнений — это частные случаи метода итераций. Сейчас мы опишем один из таких способов, называемый *способом хорд*.

Пусть нам надо решить уравнение $f(x) = 0$. Эта задача равносильна задаче об отыскании точек, в которых график функции $y = f(x)$ пересекает ось абсцисс. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна и имеет в точках a и b значения

различных знаков. Тогда по крайней мере в одной точке отрезка $[a, b]$ эта функция обращается в нуль. Иными словами, хотя бы в одной точке ξ отрезка $[a, b]$ график функции $y = f(x)$ пересекается с осью абсцисс. Вообще говоря, таких точек может быть несколько (рис. 7). Однако если функция $y = f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$ и имеет на его концах значения различных знаков, то график функции пересекается на этом отрезке с осью абсцисс лишь в одной точке ξ. Чтобы найти приближенно эту точку, заменим на отрезке $[a, b]$ дугу кривой $y = f(x)$ соответствующей хордой MN и найдем точку пересечения T этой хорды с осью Ox (рис. 8).

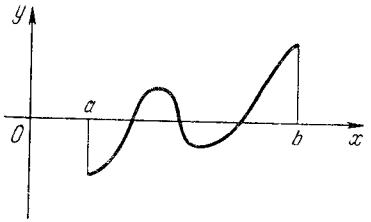


Рис. 7.

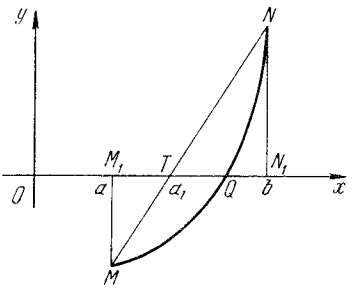


Рис. 8.

Для этого рассмотрим подобные треугольники MM_1T и NN_1T. Из подобия этих треугольников вытекает, что $\frac{M_1T}{MM_1} = \frac{TN_1}{N_1N}$. Но из рис. 8 видно, что $M_1T = a_1 - a$, $TN_1 = b - a_1$, $MM_1 = -f(a)$ и $N_1N = f(b)$, где через a_1 обозначена абсцисса точки пересечения хорды MN с осью Ox. Поэтому

$$\frac{a_1 - a}{-f(a)} = \frac{b - a_1}{f(b)}.$$

Решая это уравнение, находим, что

$$a_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Это равенство можно записать также в виде

$$a_1 = b - f(b)\frac{b - a}{f(b) - f(a)} \tag{39}$$

или

$$a_1 = a - f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)} \tag{40}$$

(проверьте, приведя правые части формул (39) и (40) к одному знаменателю).

Число a_1 и является приближенным значением корня уравнения $f(x) = 0$, лежащего между точками a и b.

Так как знаки чисел $f(a)$ и $f(b)$ различны, то либо знак $f(a)$, либо знак $f(b)$ отличаются от знака $f(a_1)$. Если в точках a и a_1 функция $f(x)$ имеет различные знаки, то применяют формулу (39) к отрезку $[a, a_1]$ и получают следующее приближение:

$$a_2 = a_1 - f(a_1)\frac{a_1 - a}{f(a_1) - f(a)} \tag{41}$$

для искомого корня. Если же функция $f(x)$ принимает значения разных знаков в точках a_1 и b, то применяют формулу (40) к отрезку $[a_1, b]$ и полагают

$$a_2 = a_1 - f(a_1)\frac{b - a_1}{f(b) - f(a_1)}. \tag{42}$$

Найдя значение a_2, применяют формулу (39) к отрезку $[a, a_2]$ (или соответственно формулу (40) к отрезку $[a_2, b]$) и находят следующее приближение a_3. Вообще, если уже найдено приближение a_n, то ищут следующее приближение по формуле

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n)\frac{a_n - a}{f(a_n) - f(a)} \tag{43}$$

или по формуле

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n)\frac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)}. \tag{44}$$

Мы получили две формулы (43) и (44). Посмотрим теперь, в каком случае надо применять ту или иную формулу. Пусть кривая обращена вогнутостью вверх. В этом случае надо соединять точки кривой с тем концом M или N, в котором функция положительна. Если же кривая обращена вогнутостью вниз, то надо соединять точки кривой с тем концом, в котором функция отрицательна. Различные возникающие при этом случаи изображены на рис. 9. Эти рисунки делают геометрически очевидным следующее утверждение:

Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна, монотонна, имеет постоянное направление вогнутости и принимает на концах отрезка значения различных знаков. Тогда при правильном выборе формулы приближений метод хорд

дает последовательность точек, сходящуюся к корню уравнения $f(x) = 0$.

Если же выбрать формулу неправильно, то способ хорд может привести к тому, что точка a_2 попадет за пределы отрезка $[a, b]$. Это изображено на рис. 10.

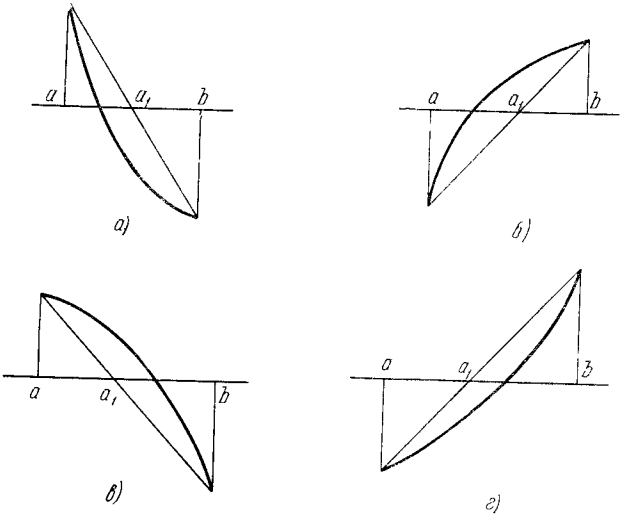


Рис. 9.

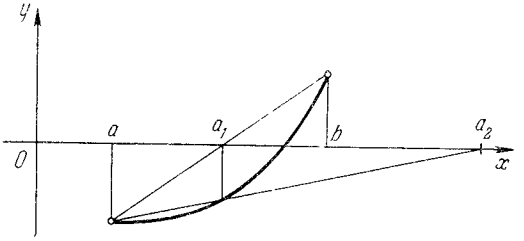


Рис. 10.

Описанный сейчас способ хорд является частным случаем метода итераций. Пусть функция $f(x)$ не обращается в нуль при $x = a$. Тогда уравнение $f(x) = 0$ равносильно уравнению

$$x = x - f(x)\,\frac{x - a}{f(x) - f(a)}\,. \qquad (45)$$

В самом деле, если $f(\xi) = 0$, то

$$\xi = \xi - f(\xi)\frac{\xi - a}{f(\xi) - f(a)}. \tag{46}$$

Обратно, если $\xi \neq a$ и выполняется равенство (46), то $f(\xi) = 0$.

Но уравнение (45) имеет вид $x = \varphi(x)$, где

$$\varphi(x) = x - f(x)\frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{af(x) - xf(a)}{f(x) - f(a)}.$$

Положим $x_0 = b$ и применим метод итераций. Мы получим ту же последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, которая получается при способе хорд:

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n)\frac{a_n - a}{f(a_n) - f(a)}.$$

Для примера решим способом хорд уравнение

$$x^3 + 3x - 1 = 0. \tag{47}$$

Здесь $f(x) = x^3 + 3x - 1$. Так как $f(0) = -1$, $f(1) = 3$, то уравнение (47) имеет хотя бы один корень на отрезке $[0, 1]$. Если нарисовать график функции $y = x^3 + 3x - 1$, то мы увидим, что на отрезке $[0, 1]$ он обращен вогнутостью вверх. Поэтому применяем формулу (39). По формуле (39) первым приближением для этого корня является число

$$x_1 = b - f(b)\frac{b - a}{f(b) - f(a)} = 1 - 3 \cdot \frac{1 - 0}{3 - (-1)} = 0{,}25.$$

Второе приближение находим по формуле

$$x_2 = b - f(b)\frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)} = 1 - 3 \cdot \frac{1 - 0{,}25}{3 + 0{,}23} = 0{,}31.$$

Далее,

$$x_3 = 1 - 3 \cdot \frac{1 - 0{,}31}{3 + 0{,}040} = 0{,}319,$$

$$x_4 = 1 - 3 \cdot \frac{1 - 0{,}319}{3 + 0{,}010} = 0{,}322,$$

$$x_5 = 1 - 3 \cdot \frac{1 - 0{,}322}{3 + 0{,}0006} = 0{,}322.$$

Таким образом, с точностью до 0,001 корень уравнения, лежащий на отрезке $[0, 1]$, равен 0,322.

§ 12. УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ СПОСОБ ХОРД

Если способ хорд сходится, то скорость сходимости будет такой же, как и у способа итераций,— погрешность значения корня убывает, как геометрическая прогрессия. Существует усовершенствование способа хорд, дающее гораздо более быструю сходимость. В обычном способе хорд мы на каждом шагу используем один из концов отрезка $[a, b]$ и последнее получившееся приближение. Вместо

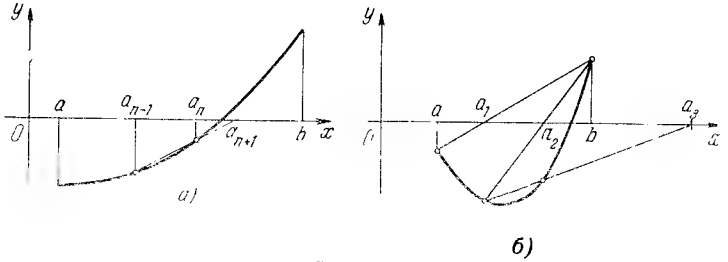


Рис. 11.

этого можно использовать два последних приближения — ведь они обычно ближе к искомому корню, чем концы отрезка $[a, b]$.

Формула, при которой мы используем два последних приближения, имеет следующий вид (рис. 11, *а*):

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n)\frac{a_n - a_{n-1}}{f(a_n) - f(a_{n-1})}. \qquad (48)$$

При этом a_1 вычисляется по формуле (39), а a_2 — по формуле (41) или (42), в зависимости от знаков $f(a)$, $f(b)$, $f(a_1)$: если $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, то при $f(a_1) < 0$ выбирается формула (42), а при $f(a_1) > 0$ — формула (41).

Если случайно окажется, что точка a_3, вычисленная по формуле (48), лежит за пределами отрезка $[a, b]$, то на следующем шаге надо вместо этой точки взять ближайший к ней конец этого отрезка (рис. 11, *б*).

Оказывается, что сходимость усовершенствованного метода хорд гораздо быстрее, чем у обычного. Именно, если ξ — корень уравнения $f(x) = 0$, то

$$|a_{n+1} - \xi| < C\,|a_n - \xi|^t, \qquad (49)$$

где

$$t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618.$$

Для примера решим этим методом то же уравнение

$$x^3 + 3x - 1 = 0,$$

которое мы ранее решили методом хорд. Первые приближения $a_1 = 0{,}25$ и $a_2 = 0{,}31$ те же, что и в обычном методе хорд.

Следующее приближение вычисляем по формуле

$$a_3 = a_2 - f(a_2)\,\frac{a_2 - a_1}{f(a_2) - f(a_1)} =$$

$$= 0{,}31 + 0{,}040\,\frac{0{,}31 - 0{,}25}{-0{,}040 + 0{,}234} = 0{,}3223.$$

Мы имеем $f(0{,}3223) = 0{,}0004$. Ясно, что $x = 0{,}3223$ дает искомый корень с точностью до 0,0001.

§ 13. ПРОИЗВОДНАЯ ОТ МНОГОЧЛЕНА

При решении уравнения $f(x) = 0$ методом итераций многое зависит от того, каким способом мы привели уравнение к виду $x = \varphi(x)$. Одним из лучших способов является во многих случаях способ, предложенный Ньютоном. Этот способ основан на понятии производной. В этом параграфе мы расскажем о том, что такое производная многочлена. Это позволит нам применить метод Ньютона к решению алгебраических уравнений, то есть уравнений вида

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k = 0. \qquad (50)$$

Пусть

$$f(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k$$

— некоторый многочлен. Рассмотрим многочлен $f(x + \alpha)$, то есть выражение

$$a_0(x+\alpha)^k + a_1(x+\alpha)^{k-1} + \ldots + a_k. \qquad (51)$$

Если раскрыть в выражении (51) скобки, то в некоторых слагаемых α будет отсутствовать, в других — входить в первой степени, в третьих — во второй и т. д. Сгруппируем члены, содержащие одну и ту же степень α. Тогда

многочлен $f(x+\alpha)$ примет такой вид:

$$f(x+\alpha) = f_0(x) + f_1(x)\alpha + f_2(x)\alpha^2 + \ldots + f_k(x)\alpha^k \quad (52)$$

(так как степень многочлена $f(x)$ равна k, то наивысшая степень α в разложении (52) тоже равна k). При этом очевидно, что $f_0(x), \ldots, f_k(x)$ также являются многочленами от x.

Пример. Пусть

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1.$$

Тогда

$$f(x+\alpha) = 2(x+\alpha)^3 - 3(x+\alpha)^2 + 6(x+\alpha) - 1 =$$
$$= 2(x^3 + 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 + \alpha^3) - 3(x^2 + 2x\alpha + \alpha^2) +$$
$$+ 6(x+\alpha) - 1 = (2x^3 - 3x^2 + 6x - 1) + (6x^2 - 6x + 6)\alpha +$$
$$+ (6x - 3)\alpha^2 + 2\alpha^3$$

Значит, в этом случае

$$f_0(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1,$$
$$f_1(x) = 6x^2 - 6x + 6,$$
$$f_2(x) = 6x - 3,$$
$$f_3(x) = 2.$$

Мы видим, что слагаемое $f_0(x)$ совпадает с $f(x)$. Это не случайно. Если положить в равенстве (52) $\alpha = 0$, то получится, что $f(x) = f_0(x)$.

Остановимся теперь на следующем слагаемом $f_1(x)\alpha$. Коэффициент при α, то есть многочлен $f_1(x)$, называется *производной многочлена* $f(x)$. Например, производная многочлена $2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ равна $6x^2 - 6x + 6$. Производную многочлена $f(x)$ принято обозначать $f'(x)$.

Итак, *производной* $f'(x)$ *многочлена* $f(x)$ *называют коэффициент при* α *в разложении многочлена* $f(x+\alpha)$ *по степеням* α.

Пользуясь введенными обозначениями, можно переписать формулу (52) в следующем виде:

$$f(x+\alpha) = f(x) + f'(x)\alpha + \ldots \quad (53)$$

Точками в этой формуле обозначены члены, содержащие α^2, α^3, ..., α^k. Например,

$$2(x+\alpha)^3 - 3(x+\alpha)^2 + 6(x+\alpha) - 1 = 2x^3 - 3x^2 + 6x -$$
$$- 1 + (6x^2 - 6x + 6)\alpha + \ldots$$

Мы ввели понятие производной многочлена $f(x)$. Покажем, как вычислять эту производную. Для этого рассмотрим многочлен

$$f(x+\alpha) = a_0(x+\alpha)^k + a_1(x+\alpha)^{k-1} + \ldots$$
$$\ldots + a_{k-1}(x+\alpha) + a_k.$$

Заменяя каждое слагаемое по формуле $(x+\alpha)^m = x^m + mx^{m-1}\alpha + \ldots$ (см. § 6), мы получим

$$\begin{aligned} f(x+\alpha) &= a_0(x^k + kx^{k-1}\alpha + \ldots) + \\ &+ a_1[x^{k-1} + (k-1)x^{k-2}\alpha^2 + \ldots] + \ldots \\ &\ldots + a_{k-1}(x+\alpha) + a_k = \\ &= a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k + \\ &+ \alpha[ka_0x^{k-1} + (k-1)a_1x^{k-2} + \ldots + a_{k-1}] + \ldots \end{aligned}$$

Сравним это равенство с равенством (53):

$$f(x+\alpha) = f(x) + \alpha f'(x) + \ldots$$

Получаем следующее утверждение:

Производная многочлена

$$f(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k \qquad (54)$$

имеет вид

$$f'(x) = ka_0x^{k-1} + (k-1)a_1x^{k-2} + \ldots + a_{k-1}. \qquad (55)$$

Например, производная многочлена

$$f(x) = 6x^7 + 8x^3 - 3x^2 - 1$$

есть

$$f'(x) = 42x^6 + 24x^2 - 6x.$$

§ 14. МЕТОД НЬЮТОНА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Вернемся к приближенному решению алгебраических уравнений. Пусть дано уравнение

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k = 0. \qquad (56)$$

Предположим, что тем или иным путем найдено приближенное значение x_1 корня этого уравнения, и покажем, как

найти более точное значение этого корня. Обозначим через α_1 погрешность значения x_1, то есть предположим, что $x_1 + \alpha_1$ является корнем уравнения (56). Тогда имеет место равенство

$$a_0(x_1 + \alpha_1)^k + a_1(x_1 + \alpha_1)^{k-1} + \ldots + a_k = 0. \qquad (57)$$

Иными словами,

$$f(x_1 + \alpha_1) = 0,$$

где через $f(x)$ обозначен многочлен

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k.$$

Но по формуле (31) имеем

$$f(x_1 + \alpha_1) = f(x_1) + \alpha_1 f'(x_1) + \ldots,$$

где точками обозначены члены, содержащие $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_1^k$. Таким образом, для определения α_1 мы имеем уравнение

$$f(x_1 + \alpha_1) = f(x_1) + \alpha_1 f'(x_1) + \ldots = 0. \qquad (58)$$

Если начальное приближение x_1 было достаточно хорошим, то погрешность α_1 этого приближения мала. Тогда в равенстве (58) члены, обозначенные точками, будут малы по сравнению с α_1. Отбрасывая эти члены, получим для определения α_1 приближенное равенство

$$f(x_1) + \alpha_1 f'(x_1) \approx 0. \qquad (59)$$

Из этого равенства вытекает, что

$$\alpha_1 \approx -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \qquad (60)$$

Поэтому улучшенное значение x_2 корня нашего уравнения дается формулой

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \qquad (61)$$

После этого можно снова улучшить найденное приближение. Третье приближение для корня дается формулой

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Вообще, если найдено n-е приближение x_n искомого корня, то следующее приближение дается формулой

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (62)$$

В развернутом виде эта формула записывается так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{a_0 x_n^k + a_1 x_n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} x_n + a_k}{k a_0 x_n^{k-1} + (k-1) a_1 x_n^{k-2} + \ldots + a_{k-1}}. \qquad (63)$$

Если в пределах заданной точности приближенные значения x_n и x_{n+1} совпадут, то наш процесс (в пределах заданной точности) закончен и искомое значение корня найдено.

Описанный метод решения уравнений принадлежит знаменитому английскому математику Ньютону.

Метод Ньютона тесно связан с методом итераций. Именно, если функции $y = f(x)$ и $y = f'(x)$ не имеют общих корней, то уравнение $f(x) = 0$ равносильно уравнению

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \qquad (64)$$

Применяя к этому уравнению метод итераций, мы получим последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, связанных с тем же соотношением

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad (65)$$

что и в методе Ньютона. Иными словами, метод Ньютона заключается в том, что уравнение $f(x) = 0$ записывают в виде (64) и применяют к нему метод итераций.

Пример. Решить по методу Ньютона уравнение

$$x^3 - 3x - 5 = 0$$

с точностью до 0,001, приняв за первое приближение $x_1 = 3$.

Так как производной многочлена

$$f(x) = x^3 - 3x - 5$$

является многочлен

$$f'(x) = 3x^2 - 3,$$

то формула (62) примет в данном случае вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n - 5}{3x_n^2 - 3}.$$

Поэтому

$$x_2 = 3 - \frac{27 - 9 - 5}{27 - 3} = 3 - \frac{13}{24} = 2{,}46,$$

$$x_3 = 2{,}46 - \frac{14{,}89 - 7{,}38 - 5}{18{,}16 - 3} = 2{,}46 - 0{,}165 = 2{,}295,$$

$$x_4 = 2{,}295 - \frac{12{,}088 - 6{,}885 - 5}{15{,}801 - 3} = 2{,}295 - 0{,}016 = 2{,}279,$$

$$x_5 = 2{,}279 - \frac{11{,}837 - 6{,}807 - 5}{15{,}582 - 3} = 2{,}279.$$

Мы видим, что с точностью до 0,001 выполняется равенство

$$x_4 = x_5.$$

Поэтому корень уравнения $x^3 - 3x - 5 = 0$ с точностью до 0,001 равен 2,279.

Изложенный в § 6 метод приближенного вычисления корней является частным случаем метода Ньютона. В самом деле, нахождение $\sqrt[k]{a}$ является не чем иным, как решением уравнения

$$x^k - a = 0.$$

Но производная многочлена $x^k - a$ равна kx^{k-1} и потому для уравнения

$$x^k - a = 0$$

формула (62) примет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}} = \frac{a + (k-1)\,x_n^k}{kx_n^{k-1}}.$$

Это и есть формула, по которой вычисляются приближения для $\sqrt[k]{a}$.

Отметим следующую существенную разницу между решением уравнения $x^k - a = 0$ и решением общего алгебраического уравнения

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k = 0.$$

Для уравнения $x^k - a = 0$ выбор начального приближения x_1 был несуществен. Как бы ни выбрать значение x_1,

после некоторого числа шагов мы получим значение $\sqrt[k]{a}$ с заданной точностью. Иначе обстоит дело при решении уравнения (56). Здесь одни начальные значения приводят к одним корням уравнения, другие начальные значения — к другим корням, а некоторые начальные значения не приводят ни к какому определенному значению корня — последовательность чисел x_1, x_2, ..., x_n, ..., вычисляемая по формуле (62), не стремится ни к какому определенному пределу, то есть расходится.

§ 15. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Метод Ньютона изложен нами пока только для алгебраических уравнений. Чтобы обобщить его на уравнения произвольного вида, надо обобщить понятие производной,

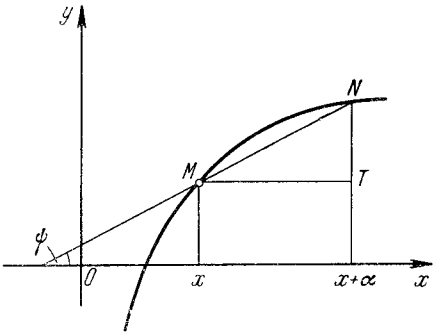


Рис. 12.

введя его для любых функций. Для этого выясним геометрический смысл понятия производной.

Рассмотрим график многочлена

$$y = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k$$

и возьмем на этом графике две точки M и N (рис. 12). Пусть в точке M абсцисса равна x, а в точке N абсцисса равна $x + \alpha$. Тогда ординаты в точках M и N даются соответственно выражениями

$$f(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k$$

и

$$f(x+\alpha) = a_0(x+\alpha)^k + a_1(x+\alpha)^{k-1} + \ldots + a_k.$$

Проведем через точки M и N секущую и вычислим угловой коэффициент $k_{сек}$ *) этой секущей. Из чертежа видно, что

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{TN}{MT}.$$

Но отрезок MT равен разности абсцисс точек M и N, и потому

$$MT = (x+\alpha) - x = \alpha.$$

Отрезок же TN равен разности ординат этих точек, и потому

$$TN = f(x+\alpha) - f(x).$$

Значит,

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{TN}{MT} = \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}.$$

Но по формуле (53)

$$f(x+\alpha) = f(x) + \alpha f'(x) + \ldots,$$

где точками обозначены члены, содержащие α^2, α^3,... Поэтому

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\alpha f'(x) + \ldots}{\alpha} = f'(x) + \ldots,$$

где на этот раз точками обозначены слагаемые, содержащие α, α^2,...

Итак, угловой коэффициент секущей MN выражается формулой

$$k_{сек} = \operatorname{tg}\psi = f'(x) + \ldots \qquad (66)$$

Будем теперь уменьшать значение α. Секущая MN будет при этом поворачиваться вокруг точки M. В пределе, при $\alpha = 0$, секущая превратится в касательную к кривой $y = f(x)$ в точке M. На рис. 13 изображены положения секущей при $\alpha = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$.

Но при $\alpha = 0$ все члены, обозначенные в формуле (66) точками, обращаются в нуль. Поэтому угловой коэффици-

*) *Угловым коэффициентом прямой* называют тангенс угла наклона этой прямой к положительному направлению оси Ox. Например, если прямая наклонена к оси Ox под углом 60°, то ее угловой коэффициент равен $\sqrt{3}$.

ент касательной к графику многочлена $y = f(x)$ в точке с абсциссой x выражается формулой

$$k_{\text{кас}} = f'(x). \tag{67}$$

Итак, *производная многочлена $f(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику этого многочлена, проведенной в точке с абсциссой x.*

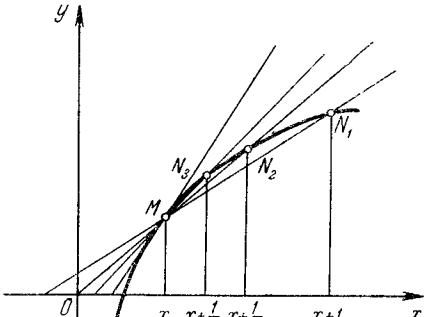


Рис. 13.

Пример. Найти, под каким углом наклонена к оси Ox касательная к графику многочлена

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 1,$$

проведенная в точке с абсциссой $x = 2$.

Так как

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5,$$

то $f'(2) = 1$. Значит, $\operatorname{tg}\varphi = 1$, и потому угол наклона φ равен $45°$.

§ 16. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МЕТОДА НЬЮТОНА

Мы можем теперь выяснить геометрический смысл метода Ньютона для приближенного решения алгебраических уравнений. Пусть надо решить уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ — некоторый многочлен. Геометрически эта задача является задачей о нахождении точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox, то есть точек, в которых $y = 0$.

Предположим, что уже найдено приближенное значение x_1 корня этого уравнения. Проведем в точке N с абсциссой x_1 касательную к кривой $y = f(x)$. При удачном выборе значения x_1 точка T пересечения касательной с осью Ox будет ближе к точке пересечения кривой $y = f(x)$ с осью Ox, чем точка M (рис. 14).

Чтобы найти абсциссу x_2 точки T, рассмотрим треугольник TMN. Катет MN этого треугольника есть не что иное, как значение функции $y = f(x)$ в точке x_1, то есть $MN = f(x_1)$. Катет же TM равен $x_1 - x_2$. Отсюда следует, что тангенс угла φ_1 наклона касательной к оси Ox выражается формулой

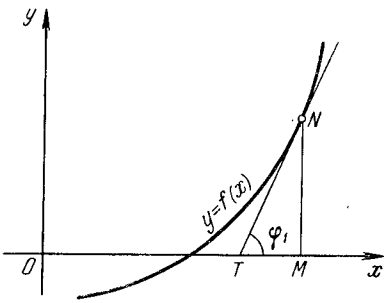


Рис. 14.

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}. \quad (68)$$

Из равенства (68) следует, что

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\operatorname{tg} \varphi_1}. \quad (69)$$

Но $\operatorname{tg} \varphi_1$ есть угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$, проведенной в точке с абсциссой x_1. Поэтому, в силу геометрического смысла производной, $\operatorname{tg} \varphi_1 = f'(x_1)$.

Значит, формулу (69) можно переписать так:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Тем самым второе приближение для искомого корня найдено. Проведем теперь касательную к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_2. Абсцисса точки пересечения этой касательной с осью Ox дается формулой

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Вообще, если уже найдено приближение x_n, то, чтобы получить следующее приближение x_{n+1}, надо провести касательную к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_n. Абсцисса точки пересечения этой касательной с осью Ox даст нам x_{n+1}.

Формула для вычисления x_{n+1} такова:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{70}$$

или, что то же самое,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\operatorname{tg} \varphi_n}, \tag{70'}$$

где φ_n — угол наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_n. Эта формула совпадает с формулой (62) способа Ньютона. Мы выяснили, таким образом, геометрический смысл способа Нью она. Он заключается в

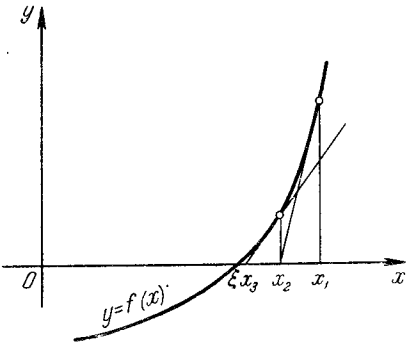


Рис. 15.

том, что дуга кривой $y = f(x)$ заменяется касательной к этой кривой. Поэтому способ Ньютона называют также *способом касательных*.

На рис. 15 изображено, как точки $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, получаемые по способу Ньютона, приближаются к точке ξ пересечения кривой $y = f(x)$ с осью Ox.

§ 17. ПРОИЗВОДНЫЕ ЛЮБЫХ ФУНКЦИЙ

Данное нами геометрическое истолкование способа Ньютона позволяет без труда обобщить его на любые уравнения вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ может уже не быть многочленом. Именно, чтобы найти решение этого уравнения, возьмем некоторое приближенное значение корня x_1. В точке с абсциссой x_1 проведем касательную к кривой $y = f(x)$ и обозначим через x_2 точку ее пересечения с осью Ox.

В точке с абсциссой x_2 вновь проведем касательную к кривой $y = f(x)$ и т. д. Так же как и в случае, когда $f(x)$ является многочленом, легко установить, что

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\operatorname{tg} \varphi_n}, \tag{71}$$

где $\operatorname{tg} \varphi_n$ — угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_n.

Формула (71) пока непригодна для вычислений, так как мы еще не умеем вычислять $\operatorname{tg} \varphi_n$. Итак, нам надо научиться вычислять угловые коэффициенты касательных к графикам любых функций $y = f(x)$ (а не только к графикам многочленов). Найдем сначала угловой коэффициент секущей. Пусть M — точка на графике функции $y = f(x)$ и MN — секущая, проходящая через эту точку. Рассуждая точно так же, как и для многочленов, мы получим, что угловой коэффициент секущей выражается формулой

$$k_{\text{сек}} = \operatorname{tg} \psi = \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}. \tag{72}$$

где x — абсцисса точки M, а $x + \alpha$ — абсцисса точки N. Если уменьшать α, то секущая будет поворачиваться вокруг точки M и стремиться занять положение касательной к кривой $y = f(x)$ в этой точке (см. рис. 12). Поэтому можно написать, что

$$k_{\text{кас}} = \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}. \tag{73}$$

Назовем предел, стоящий в правой части этого равенства, *производной* функции $f(x)$ и обозначим его через $f'(x)$, то есть положим

$$f'(x) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}. \tag{74}$$

Равенство (73) теперь можно записать в виде

$$k_{\text{кас}} = \operatorname{tg} \varphi = f'(x). \tag{75}$$

Таким образом, и для любых функций (а не только многочленов) производная функция $f(x)$ в некоторой точке равна угловому коэффициенту касательной к кривой $y = f(x)$ в этой точке *).

*) Если в точке с абсциссой x к графику функции $y = f(x)$ нельзя провести касательную (например, если в этой точке график имеет излом), то в этой точке у функции $f(x)$ отсутствует производная.

Так как $\operatorname{tg} \varphi_n = f'(x_n)$, то формулу (71) можно переписать в виде

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{76}$$

Эта формула совпадает с формулой (62). Таким образом, способ Ньютона перенесен на все уравнения вида $f(x) = 0$.

§ 18. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Мы видели в предыдущем пункте, что для нахождения углового коэффициента касательной к кривой $y = f(x)$ надо сосчитать предел

$$f'(x) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x + \alpha) - f(x)}{\alpha}.$$

Это вычисление, вообще говоря, довольно затруднительно. Но во многих важных случаях этот предел вычислен. Иными словами, для наиболее часто встречающихся функций известны их производные. Приведем список наиболее употребительных производных:

1. $(a)' = 0$.
2. $(x^k)' = kx^{k-1}$.
3. $(a^x)' = a^x \ln a$.
4. $(\sin ax)' = a \cos ax$.
5. $(\cos ax)' = -a \sin ax$.
6. $(\operatorname{tg} ax)' = \dfrac{a}{\cos^2 ax}$.
7. $(\operatorname{ctg} ax)' = -\dfrac{a}{\sin^2 ax}$.
8. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
9. $(\arcsin ax)' = \dfrac{a}{\sqrt{1 - a^2x^2}}$.
10. $(\operatorname{arctg} ax)' = \dfrac{a}{1 + a^2x^2}$.

(Через $\ln a$ в формулах 3 и 8 обозначен логарифм по основанию $e = 2{,}71828\ldots$ — так называемый *натуральный логарифм*.) Отметим, что в формуле 2 показатель k может быть не только натуральным числом, но и любым вещественным числом. Например,

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

Формул 1—10 еще недостаточно для вычисления производных любых функций. Однако, если функция $f(x)$ составляется с помощью арифметических действий из функций, для которых мы умеем считать производные, то легко найти ее производную. Для этого применяются следующие правила, доказываемые (как и формулы 1—10) в курсах высшей математики.

1. *Производная суммы двух функций равна сумме их производных, то есть*

$$[f_1(x) + f_2(x)]' = f_1'(x) + f_2'(x).$$

2. *Постоянный множитель можно вынести за знак производной*

$$[af(x)]' = af'(x).$$

3. *Производная произведения двух функций вычисляется по формуле*

$$[f_1(x) f_2(x)]' = f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x).$$

4. *Производная дроби вычисляется по формуле*

$$\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]' = \frac{f_1'(x) f_2(x) - f_1(x) f_2'(x)}{[f_2(x)]^2}.$$

Данное в § 13 правило вычисления производной от многочлена является следствием правил 1 и 2 и формулы 2 из списка.

Пример 1. Найти производную дроби

$$f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{2x^3 + 5}.$$

Пользуясь правилом 4, находим

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - x + 1)'(2x^3 + 5) - (3x^2 - x + 1)(2x^3 + 5)'}{(2x^3 + 5)^2}.$$

Далее, по правилу дифференцирования многочлена

$$(3x^2 - x + 1)' = 6x - 1$$

и

$$(2x^3 + 5)' = 6x^2,$$

а потому

$$f'(x) = \frac{(2x^3+5)(6x-1)-(3x^2-x+1)\,6x^2}{(2x^3+5)^2} =$$

$$= \frac{-6x^4+4x^3+6x^2+30x-5}{(2x^3+5)^2}.$$

Пример 2. Найти производную функции

$$f(x) = \frac{1}{10}\left(\arcsin 3x - \frac{1}{x^2}\right).$$

Решение. По формулам 2 и 9 и правилам 1 и 2 имеем

$$f'(x) = \frac{1}{10}\,\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} - \frac{1}{10}\left(\frac{-2}{x^3}\right) = \frac{3}{10\sqrt{1-9x^2}} + \frac{1}{5x^3}.$$

Пример 3. Найти производную функции

$$f(x) = 10^x \sin 2x.$$

По правилу 3 и формулам 3 и 4 имеем

$$f'(x) = (10^x)' \sin 2x + 10^x (\sin 2x)' =$$
$$= 10^x \sin 2x \ln 10 + 10^x \cdot 2\cos 2x =$$
$$= 10^x (\sin 2x \ln 10 + 2\cos 2x).$$

Указанные правила позволяют находить производные во многих случаях. Есть еще одно очень важное правило — правило о вычислении производной сложной функции. Оно формулируется так:

Если функцию $y = f(x)$ можно записать в виде $y = F(z)$, где $z = \varphi(x)$, то ее производная дается формулой

$$f'(x) = F'(z)\,\varphi'(x), \tag{77}$$

где $z = \varphi(x)$.

Пример. Найти производную функции $y = \sin(x^3)$. Эту функцию можно записать в виде $y = \sin z$, где $z = x^3$. Производная функции $F(z) = \sin z$ равна $F'(z) = \cos z$, а производная функции $\varphi(x) = x^3$ равна $\varphi'(x) = 3x^2$. Применяя формулу (77), получаем

$$[\sin(x^3)]' = F'(z)\,\varphi'(x) = \cos z \cdot 3x^2.$$

Подставляя вместо z значение $z = x^3$, получаем

$$[\sin(x^3)]' = 3x^2 \cos(x^3).$$

Более подробное изложение понятия производной читатель может найти, например, в книге: Я. Б. Зельдович, «Высшая математика для начинающих», Физматгиз, 1960.

§ 19. НАХОЖДЕНИЕ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Остановимся теперь на выборе начальных приближений. Разыскание первого приближения при решении уравнения $f(x) = 0$ можно сделать графически. Для этого надо начертить график функции $y = f(x)$ и найти точки пересечения этого графика с осью Ox (в этих точках $y = 0$, и потому $f(x) = 0$).

Если по каким-либо соображениям чертить график функции неудобно (скажем, если уравнение решается на электронной вычислительной машине), прибегают к другому

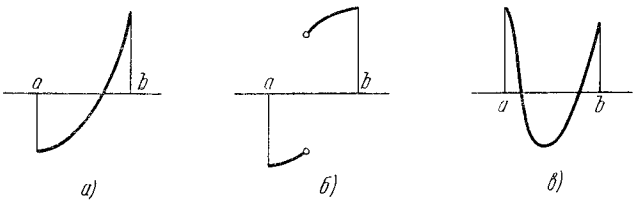


Рис. 16.

способу определения первого приближения. Для этого вычисляют значение функции для некоторых значений аргумента (например, для целых значений аргумента, лежащих в известных пределах). Если функция $y = f(x)$ непрерывна (то есть ее график не имеет разрывов), то между значениями a и b, в которых функция имеет различные знаки (рис. 16, *а*), лежит корень уравнения $f(x) = 0$ (если у графика функции есть разрывы, то может случиться, что она скачком переходит от отрицательных значений к положительным, не обращаясь по пути в нуль (рис. 16, *б*)). Значения a или b можно принять за первые приближения для корня уравнения $f(x) = 0$.

Отметим, что при этом можно пропустить некоторые корни уравнения. Так, на рис. 16, *в* изображен случай, когда функция $y = f(x)$ имеет в двух точках значения од-

ного и того же знака, но между этими значениями обращается в нуль.

Мы получили, таким образом, две точки: a и b. Чтобы выяснить, какую из них лучше выбрать за начальное приближение x в методе Ньютона, рассмотрим рис. 17. Рис. 17, *а* и 17, *б* показывают, что *если кривая обращена вогнутостью вверх, то за начальное приближение надо выбирать ту*

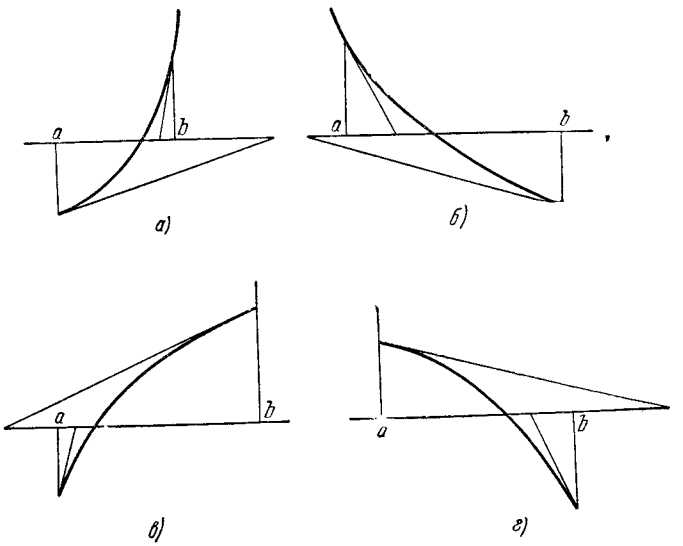


Рис. 17.

из точек a и b, в которой функция $f(x)$ положительна. Другой выбор начального приближения может даже привести к тому, что точка x_2 окажется вне отрезка $[a, b]$. Точно так же, *если кривая обращена вогнутостью вниз, то за начальное приближение надо брать точку, в которой функция $f(x)$ отрицательна* (рис. 17, *в*, *г*).

Это правило удобно применять, если известен график функции $y = f(x)$. Если же график этой функции не нарисован, то определение направления вогнутости требует дополнительных расчетов. Для этого надо найти вторую производную функцию $f(x)$. *Второй производной функции* $f(x)$ называется производная от ее первой производной.

Например, если дана функция

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 1,$$

то ее первая производная равна

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3,$$

а вторая производная есть

$$f''(x) = 6x - 8.$$

В курсах высшей математики доказывают, что если на отрезке $[a, b]$ вторая производная положительна, то кривая обращена вогнутостью вверх на этом отрезке. Если же вторая производная на отрезке $[a, b]$ отрицательна, то кривая на нем обращена вогнутостью вниз. Пользуясь этим, получаем такое правило для применения способа Ньютона:

Пусть в точках a и b функция $f(x)$ имеет различные знаки, причем на отрезке $[a, b]$ вторая производная функции $f(x)$ положительна. Тогда за начальное приближение x_1 надо выбирать ту из точек a или b, в которой функция $f(x)$ принимает положительное значение. Если же на отрезке $[a, b]$ вторая производная отрицательна, то за начальное приближение x_1 надо выбирать ту точку, в которой функция $f(x)$ принимает отрицательное значение.

§ 20. КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

При решении уравнений часто комбинируют методы хорд и Ньютона. Если график функции $y = f(x)$ обращен вогнутостью вверх, то находят точки a_1 и x_1 по формулам

$$a_1 = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}; \tag{78}$$

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{79}$$

Если же график функции $y = f(x)$ обращен вогнутостью вниз, то точку a_1 находят по формуле (78), а точку x_1 — по формуле

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{80}$$

Как видно из рис. 18, *а* и 18, *б*, корень ξ уравнения $f(x) = 0$ лежит обычно между полученными точками a_1 и x_1. Применяя снова к этим точкам формулы способа хорд и способа Ньютона, получают новую пару точек a_2 и x_2 и т. д.

Таким путем получают две последовательности точек $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, приближающиеся с разных сторон к искомому корню ξ. Преимущество описанного способа состоит в том, что при нем получаются приближенные значения как с избытком, так и с недостатком.

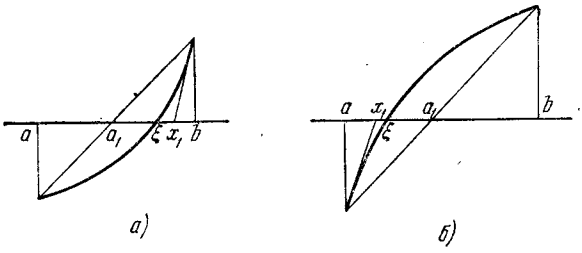


Рис. 18.

Пример. Решить комбинированным способом уравнение

$$x - \sin x - 0{,}5 = 0$$

с точностью до 0,001.

Составим таблицу значений непрерывной функции

$$f(x) = x - \sin x - 0{,}5.$$

x	—1	0	1	2
$f(x)$	—0,659	—0,5	—0,341	0,591

Из этой таблицы видно, что корень уравнения лежит между 1 и 2. По формулам 2 и 4 из § 18 имеем

$$f'(x) = 1 - \cos x.$$

Поэтому формула Ньютона принимает в нашем случае вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \sin x_n - 0{,}5}{1 - \cos x_n}. \qquad (81)$$

Чтобы узнать, какое из значений 1 или 2 надо принять за x_0, найдем вторую производную от функции $f(x)$. По формуле 5 § 18 она имеет вид $f''(x) = \sin x$. Но на отрезке [1, 2] функция $\sin x$ положительна *). Значит, пользуясь приведенным выше правилом, за x_0 надо взять значение 2, при котором положительна и функция $f(x)$.

Имеем по формуле (81)

$$x_1 = 2 - \frac{2 - \sin 2 - 0{,}5}{1 - \cos 2} = 2 - \frac{2 - 0{,}909 - 0{,}5}{1 + 0{,}416} = 1{,}583.$$

С другой стороны, по формуле (78) имеем

$$a_1 = 1 - (-0{,}341)\frac{2 - 1}{0{,}501 - (-0{,}341)} = 1{,}366.$$

Применяя далее формулы (81) и (78) к отрезку $[a_1, x_1]$, находим

$$x_2 = 1{,}583 - \frac{1{,}583 - 1{,}000 - 0{,}5}{1 + 0{,}012} = 1{,}501$$

и

$$a_2 = 1{,}366 + 0{,}113\frac{1{,}583 - 1{,}366}{0{,}083 + 0{,}113} = 1{,}491.$$

Далее находим

$$x_3 = 1{,}498,$$
$$a_3 = 1{,}498.$$

Итак, корень нашего уравнения с точностью до 0,001 есть 1,498.

§ 21. ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССА ИТЕРАЦИЙ

Применим теперь понятие производной для вывода нового признака сходимости процесса итераций. Нам понадобится для этого одна формула, называемая формулой Лагранжа (Лагранж — математик XVIII века, живший во Франции).

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ кривую $y = f(x)$. Обозначим через M начальную точку этой кривой, а через N —

*) $\sin x$ положителен на отрезке $[0; \pi] = [0; 3{,}141...]$ Значит, $\sin x$ положителен и на части [1, 2] этого отрезка.

ее конечную точку и проведем хорду MN. Угловой коэффициент этой хорды имеет вид

$$k_{\text{хорды}} = \operatorname{tg} \psi = \frac{PN}{MP}$$

(рис. 19). Но $MP = b - a$, а $PN = f(b) - f(a)$, и потому

$$k_{\text{хорды}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Обозначим теперь через T точку дуги MN, наиболее удаленную от хорды MN. Если провести через эту точку прямую, параллельную хорде, то она будет касаться кривой: в случае пересечения на кривой были бы точки, более удаленные от хорды MN, чем точка T. Иными словами, касательная к кривой, проведенная в точке T, параллельна хорде MN, и потому имеет тот же угловой коэффициент, что и хорда. Но угловой коэффициент касательной равен $f'(c)$, где c — абсцисса точки T. Поэтому имеет место формула

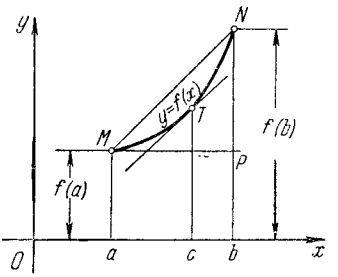


Рис. 19.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{82}$$

Эта формула и называется формулой Лагранжа. Заметим, что точка c в формуле Лагранжа всегда лежит между точками a и b. Формулу Лагранжа можно также записать в следующем виде:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{83}$$

Вернемся теперь к решению уравнения $x = \varphi(x)$ по способу итераций. Пусть отображение $y = \varphi(x)$ переводит отрезок $[a, b]$ в себя, причем на этом отрезке выполняется неравенство $|\varphi'(x)| < q$, где q — некоторое число, меньшее единицы, $q < 1$. Возьмем на отрезке $[a, b]$ любые две точки x_1 и x_2. Тогда точки $\varphi(x_1)$ и $\varphi(x_2)$ также принадлежат отрезку $[a, b]$. При этом по формуле Лагранжа имеем

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \varphi'(c)(x_2 - x_1),$$

где c — некоторая точка, лежащая между x_1 и x_2, а потому принадлежащая отрезку $[a, b]$. Справедливо неравенство $|\varphi'(c)| < q < 1$, а потому

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leqslant q\,|x_2 - x_1|. \tag{84}$$

Неравенство (84) показывает, что $\varphi(x)$ задает сжимающее отображение. Но мы знаем, что если $x \to \varphi(x)$ — сжимающее отображение отрезка $[a, b]$ в себя, то для любой точки x_0 этого отрезка последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, где $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, сходится к корню уравнения $x = \varphi(x)$. Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема. *Пусть функция $y = \varphi(x)$ задает отображение отрезка $[a, b]$ в себя и пусть на этом отрезке выполняется неравенство $|\varphi'(x)| < q$, где $q < 1$. Тогда, какова бы ни была точка x_0 отрезка $[a, b]$, последовательность точек $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, где $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, сходится к корню уравнения $x = \varphi(x)$.*

Грубо говоря, смысл доказанной теоремы заключается в том, что процесс последовательных приближений позволяет найти те корни ξ уравнения $x = \varphi(x)$, в которых выполняется неравенство $|\varphi'(\xi)| < 1$. Можно сказать, что эти точки притягивают к себе ломаную, геометрически изображающую процесс итераций (см. § 8), а точки, где $|\varphi'(\xi)| > 1$, отталкивают от себя эту ломаную.

Если неравенство $|\varphi'(x)| < q < 1$ выполняется на всей числовой оси, то процесс итераций сходится при любом выборе начального приближения x_0 (см. § 10).

Пример 1. Можно ли применить процесс итераций для решения уравнения

$$x = \frac{\cos x + \sin x}{4}\ ?$$

В данном случае

$$\varphi(x) = \frac{\cos x + \sin x}{4}.$$

Поэтому

$$\varphi'(x) = \frac{-\sin x + \cos x}{4}.$$

Но $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$, поэтому

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{-\sin x + \cos x}{4}\right| \leqslant \frac{|\sin x| + |\cos x|}{4} < \frac{1}{2},$$

и процесс итераций применим.

Пример 2. Применим ли процесс итераций для решения уравнения

$$x = 4 - 2^x? \tag{85}$$

Искомый корень лежит на отрезке [1, 2], так как непрерывная функция $y = x - 4 + 2^x$ меняет знак на этом отрезке:

$$1 - 4 + 2^1 < 0, \text{ а } 2 - 4 + 2^2 > 0.$$

Но в данном случае имеем

$$\varphi'(x) = -2^x \ln 2.$$

Оценим выражение $2^x \ln 2$ на отрезке [1, 2]. Если

$$1 \leqslant x \leqslant 2, \text{ то } 2 \leqslant 2^x \leqslant 4,$$

и потому

$$2 \ln 2 \leqslant 2^x \ln 2 \leqslant 4 \ln 2.$$

По таблицам натуральных логарифмов (основанием которых является число $e \approx 2{,}78...$) имеем $\ln 2 = 0{,}69...$ Значит, на отрезке [1, 2] выполняется неравенство

$$1{,}38... \leqslant 2^x \ln 2 \leqslant 2{,}76...$$

и процесс итераций неприменим.

Чтобы применить процесс итераций, преобразуем уравнение (85). Перепишем его в виде

$$2^x = 4 - x$$

и прологарифмируем обе части по основанию 2. Тогда получим

$$x = \log_2 (4 - x).$$

В этом случае

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{(4 - x)\ln 2}$$

и на отрезке [1, 2] выполнено неравенство

$$|\varphi'(x)| < \frac{1}{2 \ln 2} = \frac{1}{1{,}38} < 1.$$

(Вывод этого неравенства читатель легко сделает сам.)

Поэтому при такой записи уравнения процесс итераций сходится.

§ 22. БЫСТРОТА СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССА ИТЕРАЦИЙ *)

Используем теперь производную функции $\varphi(x)$ для оценки скорости сходимости итераций при решении уравнения $x = \varphi(x)$. Мы хотим оценить скорость, с которой убывают погрешности $\alpha_n = \xi - x_n$ приближенных значений $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ корня ξ.

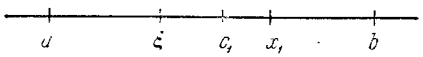


Рис. 20

Заметим, что справедливы равенства $\xi = \varphi(\xi)$ и $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Из них вытекает

$$\alpha_{n+1} = \xi - x_{n+1} = \varphi(\xi) - \varphi(x_n).$$

Но по формуле Лагранжа имеем

$$\varphi(\xi) - \varphi(x_n) = \varphi'(c_n)(\xi - x_n) = \varphi'(c_n)\,\alpha_n,$$

где c_n — точка, лежащая между точками x_n и ξ. Поэтому

$$\alpha_{n+1} = \varphi'(c_n)\,\alpha_n. \tag{86}$$

Из равенства (86) вытекает следующий вывод:

Пусть ξ — корень уравнения $x = \varphi(x)$ — лежит на отрезке $[a, b]$. Если на этом отрезке выполняется неравенство $|\varphi'(x)| < q < 1$, а начальное приближение x_1 также выбрано на отрезке $[a, b]$, то при любом n выполняется соотношение

$$|\alpha_{n+1}| < q^n\,|\alpha_1|. \tag{87}$$

В самом деле, из равенства (86) имеем

$$|\alpha_2| = |\varphi'(c_1)|\,|\alpha_1|.$$

Но точка c_1 лежит на отрезке $[a, b]$ (рис. 20), и потому

$$|\varphi'(c_1)| < q.$$

Отсюда следует, что

$$|\alpha_2| < q\,|\alpha_1|.$$

*) Этот параграф при первом чтении можно опустить.

Точно так же мы получаем, что

$$|\alpha_3| = |\varphi'(c_2)||\alpha_2| < q|\alpha_2| < q^2|\alpha_1|$$

и вообще

$$|\alpha_{n+1}| < q^n|\alpha_1|.$$

Тем самым наше утверждение доказано.

Так как при $0 < q < 1$ последовательность чисел q, $q^2, \ldots, q^n, \ldots$ стремится к нулю, то и погрешность α_{n+1} стремится к нулю с возрастанием n. Иными словами, при указанных выше предположениях числа $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ приближаются к числу ξ, причем разность $|\xi - x_{n+1}|$ убывает быстрее, чем $|\alpha_1| q^n$.

Точно так же можно доказать, что если на отрезке $[a, b]$ выполнено неравенство

$$|\varphi'(x)| > 1,$$

то процесс итераций расходится.

Особенно быстро сходится процесс последовательных приближений, если в точке ξ производная функция $\varphi(x)$ обращается в нуль. В этом случае по мере приближения к ξ значение $\varphi'(x)$ стремится к нулю. Так как

$$|\alpha_{n+1}| = |\varphi'(c_n)|\,|\alpha_n|,$$

то сходимость процесса ускоряется по мере приближения к точке ξ.

Мы уже столкнулись с этим обстоятельством при извлечении квадратных корней по способу итераций. Напомним, что при этом мы заменили уравнение $x^2 = a$ уравнением $x = \frac{x^2 + a}{2x}$. Но производная функции $\varphi(x) = \frac{x^2 + a}{2x}$ равна выражению

$$\varphi'(x) = \frac{(x^2 + a)' \, 2x - (x^2 + a)(2x)'}{4x^2} =$$

$$= \frac{2x \cdot 2x - (x^2 + a)\,2}{4x^2} = \frac{x^2 - a}{2x^2}$$

(см. правило 4 из § 18 и формулу (55) из § 13), поэтому

$$\varphi'(\sqrt{a}) = \frac{(\sqrt{a})^2 - a}{2(\sqrt{a})^2} = 0.$$

Таким образом, в точке $x = \sqrt{a}$ производная функции $\varphi(x)$ обращается в нуль, а это вызывает ускорение сходимости процесса по мере приближения к точке $x = \sqrt{a}$.

Явление ускорения процесса по мере приближения к корню уравнения наблюдается и для способа Ньютона (частным случаем которого является указанный способ извлечения корней). В самом деле, мы уже отмечали, что способ Ньютона связан с заменой уравнения $f(x) = 0$ уравнением

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

и последующим решением этого уравнения последовательными приближениями. В этом случаем мы имеем

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

но

$$\varphi'(x) = 1 - \left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]' = 1 - \frac{f'(x)[f(x)]' - f(x)[f'(x)]'}{[f'(x)]^2} =$$
$$= 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Так как в точке ξ выполнено равенство $f(\xi) = 0$, то $\varphi'(\xi) = 0$. А это, как было показано, обеспечивает ускорение сходимости процесса приближений по мере стремления к точке ξ.

§ 23. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Мы решали до сих пор уравнения с одним неизвестным. Перейдем теперь к решению систем уравнений. При этом мы начнем с рассмотрения систем первой степени.

Пусть даны m уравнений первой степени с m неизвестными *)

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m &= b_m. \end{aligned}\right\} \qquad (88)$$

*) Мы обозначаем в этих уравнениях неизвестные буквами $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а коэффициенты — буквами a_{ij}. Здесь первый значок обозначает номер уравнения, а второй — номер неизвестного. Например, a_{47} — это коэффициент в четвертом уравнении при седьмом неизвестном.

Такие системы встречаются в различных приложениях. Например, когда геодезисты уравнивают результаты измерений больших частей земной поверхности, им приходится иногда решать системы, состоящие из многих сотен уравнений. Приходится решать такие системы уравнений и инженерам при расчете стержневых конструкций и многим другим специалистам.

Решать такие системы обычными методами (например, методом исключения неизвестных) часто бывает чрезвычайно затруднительно. Более удобным оказывается метод последовательных приближений. Покажем сначала на примере, как это делается.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2 + x_3 &= 9, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= 8, \\ 4x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 39. \end{aligned}$$

Требуется найти неизвестные x_1, x_2, x_3 с точностью до 0,01.

Выразим из первого уравнения x_1, из второго уравнения x_2 и из третьего уравнения x_3. Тогда система примет такой вид:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0{,}9 + \phantom{1{,}6 - {}} 0{,}2\,x_2 - 0{,}1\,x_3, \\ x_2 &= 1{,}6 - 0{,}2\,x_1 + \phantom{0{,}2\,x_2 - {}} 0{,}2\,x_3, \\ x_3 &= 4 - 0{,}5\,x_1 - 0{,}25\,x_2. \end{aligned}\right\} \qquad (89)$$

Возьмем любые значения x_1, x_2, x_3 в качестве начальных приближений, например, положим $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, $x_3^{(0)} = 0$. Подставим эти значения в правые части равенства (89) и примем получающиеся значения x_1, x_2, x_3 за следующие приближенные значения. Мы получаем

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 0{,}9; \\ x_2^{(1)} &= 1{,}6; \\ x_3^{(1)} &= 4. \end{aligned}$$

Найденные значения снова подставим в правые части уравнений (89). Получаем приближения

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= 0{,}9 + 0{,}2\cdot 1{,}6 - 0{,}1\cdot 4 = 0{,}82, \\ x_2^{(2)} &= 1{,}6 - 0{,}2\cdot 0{,}9 + 0{,}2\cdot 4 = 2{,}22, \\ x_3^{(2)} &= 4 - 0{,}5\cdot 0{,}9 - 0{,}25\cdot 1{,}6 = 3{,}15. \end{aligned}$$

Вообще, если найдены значения $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}$, $x_3^{(n)}$, то следующие приближения вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= 0{,}9 + 0{,}2x_2^{(n)} - 0{,}1x_3^{(n)}, \\ x_2^{(n+1)} &= 1{,}6 - 0{,}2x_1^{(n)} + 0{,}2x_3^{(n)}, \\ x_3^{(n+1)} &= 4 - 0{,}5x_1^{(n)} - 0{,}25x_2^{(n)}. \end{aligned}\right\} \qquad (90)$$

Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

n	1	2	3	4	5	6
$x_1^{(n)}$	0,9	0,82	1,03	1,01	1,00	1,00
$x_2^{(n)}$	1,6	2,22	2,07	2,00	1,99	2,00
$x_3^{(n)}$	4,0	3,15	3,03	2,97	3,00	3,00

Мы видим, что в пределах заданной точности выполняются равенства

$$x_1^{(5)} = x_1^{(6)}, \quad x_2^{(5)} = x_2^{(6)}, \quad x_3^{(5)} = x_3^{(6)}. \qquad (91)$$

Полагая в равенствах (90) $n = 5$ и принимая во внимание равенства (91), получаем, что в пределах заданной точности

$$\begin{aligned} x_1^{(5)} &\approx 0{,}9 + 0{,}2x_2^{(5)} - 0{,}1x_3^{(5)}, \\ x_2^{(5)} &\approx 1{,}6 - 0{,}2x_1^{(5)} + 0{,}2x_3^{(5)}, \\ x_3^{(5)} &\approx 4 - 0{,}5x_1^{(5)} - 0{,}25x_2^{(5)} \end{aligned}$$

(на самом деле, эти равенства выполняются точно, но это несущественно). Отсюда следует, что числа $x_1^{(5)} = 1{,}00$; $x_2^{(5)} = 2{,}00$; $x_3^{(5)} = 3{,}00$ являются (в пределах заданной точности) решениями заданной системы уравнений.

Точно так же поступают в общем случае *). Пусть дана система уравнений (88). Выразим из первого уравнения x_1,

*) Дальнейший текст до конца этого параграфа может быть опущен при первом чтении.

из второго — x_2 и т. д. Тогда система (88) примет такой вид:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \ldots - \frac{a_{1m}}{a_{11}} x_m, \\
x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \ldots - \frac{a_{2m}}{a_{22}} x_m, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_m &= \frac{b_m}{a_{mm}} - \frac{a_{m1}}{a_{mm}} x_1 - \frac{a_{m2}}{a_{mm}} x_2 - \ldots - \frac{a_{m,m-1}}{a_{mm}} x_{m-1}.
\end{aligned}
\tag{92}
$$

Пусть $x_1^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}$ — некоторые начальные приближения для неизвестных $x_1, \ldots, x_m$.

Подставляя эти приближенные значения в правые части равенств (92), мы получим вторые приближения $x_1^{(2)}, \ldots, x_m^{(2)}$ для искомых неизвестных:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(1)} - \ldots - \frac{a_{1m}}{a_{11}} x_m^{(1)}, \\
x_2^{(2)} &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(1)} - \ldots - \frac{a_{2m}}{a_{22}} x_m^{(1)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_m^{(2)} &= \frac{b_m}{a_{mm}} - \frac{a_{m1}}{a_{mm}} x_1^{(1)} - \ldots - \frac{a_{m.m-1}}{a_{mm}} x_{m-1}^{(1)}.
\end{aligned}
$$

Точно так же если уже найдены n-е приближения $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}$ для неизвестных, то следующий шаг выполняется по формулам

$$
\begin{aligned}
x_1^{(n+1)} &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(n)} - \ldots - \frac{a_{1m}}{a_{11}} x_m^{(n)}, \\
x_2^{(n+1)} &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(n)} - \ldots - \frac{a_{2m}}{a_{22}} x_m^{(n)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_m^{(n+1)} &= \frac{b_m}{a_{mm}} - \frac{a_{m1}}{a_{mm}} x_1^{(n)} - \ldots - \frac{a_{m,m-1}}{a_{mm}} x_{m-1}^{(n)}.
\end{aligned}
\tag{93}
$$

Рассмотрим теперь задачу, в которой речь будет идти не о решении системы линейных уравнений методом последовательных приближений а, наоборот, о нахождении

предельного состояния некоторого процесса приближений путем решения системы уравнений.

Имеется три ведра. В первом из них 12 л воды, а второе и третье ведра пустые. Из первого ведра переливают половину воды во второе, потом из второго ведра — половину воды в третье и, наконец, из третьего ведра — половину воды в первое ведро. Этот цикл повторяют 20 раз. Требуется определить (с точностью до 0,0001 л), сколько воды окажется после этого в каждом ведре.

Ясно, что здесь речь идет о последовательных приближениях к некоторому предельному распределению воды. Это предельное распределение характеризуется тем, что оно не меняется после проведения одного описанного выше цикла переливаний. Если в начале цикла в первом ведре x литров воды, во втором y, а в третьем $12 - x - y$ литров (общее количество воды не меняется в процессе переливания), то описанный выше цикл задается следующей таблицей:

	1-е ведро	2-е ведро	3-е ведро
Начальное состояние	x	y	$12-x-y$
После 1-го переливания	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}+y$	$12-x-y$
После 2-го переливания	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}$	$12-\frac{3}{4}x-\frac{y}{2}$
После 3-го переливания	$6+\frac{x}{8}-\frac{y}{4}$	$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}$	$6-\frac{3}{8}x-\frac{y}{4}$

Для того чтобы этот цикл переливаний не изменял количества воды в каждом ведре, должны выполняться следующие уравнения:

$$x = 6 + \frac{x}{8} - \frac{y}{4},$$

$$y = \frac{x}{4} + \frac{y}{2}.$$

Решая их, находим, что $x = 6$, $y = 3$. Значит, предельное распределение характеризуется тем, что в первом ведре 6 *л* воды, во втором 3 *л*, а тогда и в третьем будет 3 *л* воды.

Выясним, с какой скоростью приближается заданное распределение воды к предельному. Пусть первое ведро содержит a литров, а второе b литров. После одного цикла

в первом ведре окажется

$$a_1 = 6 + \frac{a}{8} - \frac{b}{4} \tag{94}$$

литров, а во втором

$$b_1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} \tag{95}$$

литров.

Обозначим $a - 6$ через α, $b - 3$ через β, $a_1 - 6$ через α_1 и $b_1 - 3$ через β_1. Тогда из равенств (94) и (95) следует, что

$$\alpha_1 = a_1 - 6 = \frac{a-6}{8} - \frac{b-3}{4} = \frac{\alpha}{8} - \frac{\beta}{4}$$

и

$$\beta_1 = b_1 - 3 = \frac{a-6}{4} + \frac{b-3}{2} = \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2}.$$

После второго цикла погрешности будут выражаться формулами

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{8} - \frac{\beta_1}{4} = \frac{1}{8}\left(\frac{\alpha}{8} - \frac{\beta}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2}\right) = -\frac{3}{64}\alpha - \frac{5}{32}\beta,$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\beta_1}{2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{8} - \frac{\beta}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{5}{32}\alpha - \frac{3}{16}\beta.$$

Поэтому если $|\alpha| < \varepsilon$ и $|\beta| < \varepsilon$, то

$$|\alpha_2| < \frac{13}{64}\varepsilon \simeq 0{,}2\varepsilon,$$

$$|\beta_2| < \frac{11}{32}\varepsilon \simeq 0{,}34\,\varepsilon.$$

Это означает, что два цикла переливаний уменьшают погрешности α и β не менее чем в три раза. Поэтому после 20 циклов она уменьшится по крайней мере в $3^{16} \simeq 70\,000$ раз. Значит, с точностью до 0,0001 *л* после 20 циклов переливаний в первом ведре будет 6 *л* воды, во втором — 3 *л* и в третьем 3 *л*.

§ 24. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Методом последовательных приближений (итераций) можно решать и некоторые системы нелинейных уравнений. Рассмотрим, например, систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 + \frac{x^2 + y}{20}, \\ y &= 1 + \frac{x + y^2}{20}. \end{aligned}\right\} \qquad (96)$$

Выберем в качестве первых приближений $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Подставляя эти приближения вместо x и y в правые части уравнений, получим следующие приближения: $x_1 =$, $y_1 = 1$. Подставляя эти приближения в правые части уравнений (96), получаем

$$x_2 = 2 + \frac{2^2 + 1}{20} = 2{,}25,$$

$$y_2 = 1 + \frac{2 + 1^2}{20} = 1{,}15.$$

Продолжая этот процесс, мы получим

$$x_3 = 2 + \frac{2{,}25^2 + 1{,}15}{20} = 2{,}31,$$

$$y_3 = 1 + \frac{2{,}25 + 1{,}15^2}{20} = 1{,}18,$$

$$x_4 = 2 + \frac{2{,}31^2 + 1{,}18}{20} = 2{,}33,$$

$$y_4 = 1 + \frac{2{,}31 + 1{,}18}{20} = 1{,}18,$$

$$x_5 = 2 + \frac{2{,}33^2 + 1{,}18^2}{20} = 2{,}33,$$

$$y_5 = 1 + \frac{2{,}33 + 1{,}18^2}{20} = 1{,}18.$$

Мы видим, что с точностью до 0,01 выполняются равенства $x_4 = x_5 = 2{,}33$ и $y_4 = y_5 = 1{,}18$. Поэтому с указанной точностью имеем $x = 2{,}33$ и $y = 1{,}18$.

Вообще, если задана система уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(x, y), \\ y &= \psi(x, y), \end{aligned}\right\} \qquad (97)$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — какие-то функции, то мы выбираем начальные приближения x_0 и y_0, подставляем их в правые части уравнений (97) и далее ведем расчеты по формулам

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= \varphi(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= \psi(x_n, y_n). \end{aligned}\right\} \qquad (98)$$

Если при некотором номере n с заданной степенью точности выполняются равенства $x_{n+1} \approx x_n$, $y_{n+1} \approx x_n$, то с этой степенью точности имеем $x \approx x_n$, $y \approx y_n$.

Точно так же решаются системы уравнений с тремя и большим числом неизвестных.

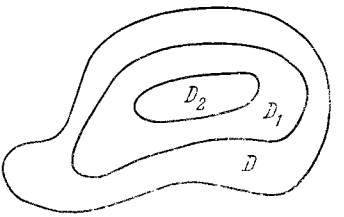


Рис. 21.

Выясним теперь, при каких условиях можно гарантировать сходимость процесса последовательных приближений при решении систем.

Мы будем считать, что функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ в системе уравнений (97) заданы в некоторой ограниченной замкнутой области D на плоскости x, y. Иными словами, мы будем считать, что область D целиком лежит внутри какого-то квадрата и что ей принадлежат все ее граничные точки. Примерами таких областей могут служить круг, многоугольник (взятый вместе с граничной ломаной), эллипс и т. д. Мы будем считать, кроме того, что функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ непрерывны в области D. Функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ задают отображение области D на какую-то область, лежащую в той же плоскости. Чтобы найти, в какую точку переходит точка $M_0(x_0, y_0)$ области D, надо подставить ее координаты вместо x и y в $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$. Результаты подстановки и дадут координаты образа точки M_0. Например, если

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2,$$
$$\psi(x, y) = 2xy,$$

то точка M_0 (1, 3) переходит в точку N_0 (10, 6).

В дальнейшем мы будем обозначать отображение, заданное функциями $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ одной буквой Φ, а образ точки M при этом отображении обозначим $\Phi(M)$. Через $\Phi(D)$ обозначим образ всей области D.

Пусть отображение Φ переводит область D в ее часть $D_1 = \Phi(D)$. Тогда можно повторно применить то же самое отображение. При этом область D_1 перейдет в свою часть $D_2 = \Phi(D_1)$, которая, конечно, тоже лежит в области D. Продолжая этот процесс, мы получим систему вложенных друг в друга областей D, D_1, ..., D_n,... (рис. 21).

Назовем отображение Φ *сжимающим*, если существует такое число q, что $0 < q < 1$, и для любых двух точек M_1 и M_2 из области D выполняется неравенство

$$r(\Phi(M_1), \Phi(M_2)) \leqslant qr(M_1, M_2).$$

Здесь через $r(M, N)$ обозначено расстояние между точками M и N.

Точно так же как и в случае одного переменного, доказывается следующее утверждение:

Пусть отображение Φ переводит область D в свою часть и является сжимающим. Тогда в области D есть единственная точка N такая, что $N = \Phi(N)$. Эта точка принадлежит всем областям D_n. Координаты ξ, η точки N удовлетворяют системе уравнений (97), *то есть*

$$\xi = \varphi(\xi, \eta),$$
$$\eta = \psi(\xi, \eta).$$

Как и в случае одного переменного, значения ξ и η приближенно вычисляются методом итераций. Если $M_0(x_0, y_0)$ — любая точка области D и $M_{n+1} = \Phi(M_n)$ (то есть $x_{n+1} = \varphi(x_n, y_n)$, $y_{n+1} = \psi(x_n, y_n)$), то последовательность точек M_0, M_1,..., M_n,... сходится к неподвижной точке N отображения Φ.

§ 25. ВИДОИЗМЕНЕННОЕ РАССТОЯНИЕ

Условие, что отображение Φ является сжимающим, дает достаточный признак сходимости процесса итераций. Но этот признак не является необходимым. Отображение Φ может не быть сжимающим, а процесс итераций все-таки сходится. Например, отображение Φ, заданное функциями $\varphi(x, y) = 1 + 2y$, $\psi(x, y) = 3 + \frac{x}{8}$, не сжимающее. Если взять A (8, 0), B (8, 4), то

$$r(A, B) = 4, \ \Phi(A) = (1, 4), \ \Phi(B) = (9, 4)$$

и

$$r(\Phi(A),\ \Phi(B)) = 8 > r(A,\ B).$$

Однако, какую бы точку M_0 мы ни взяли, последовательность точек M_0, $M_1, \ldots, M_n, \ldots$ сходится к точке

$$N\left(9\frac{1}{3},\ 4\frac{1}{6}\right).$$

В некоторых случаях удается установить сходимость процесса итераций, видоизменив определение расстояния между точками на плоскости. Дело в том, что расстояние

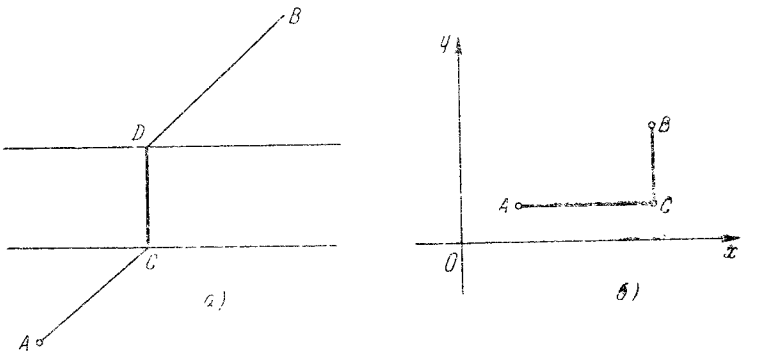


Рис. 22.

между точками можно определять по-разному. Для путешественника естественно измерять расстояние временем, которое надо потратить, чтобы добраться из точки A в точку B. А тогда расстояние между точками A и B на рис. 22, *а* определится суммой длин отрезков AC, CD и DB (чтобы попасть из точки A в точку B, надо дойти до моста CD, перейти этот мост и из точки D попасть в точку B). А если движение на плоскости может происходить только в двух взаимно перпендикулярных направлениях, то за расстояние между точками A и B на рис. 22, *б* надо принять сумму отрезков AC и CB. В других случаях удобнее считать «расстоянием» между точками A и B длину большего из отрезков AC и CB. Можно придумать и другие определения «расстояний» между точками плоскости. (Подробнее о разных определениях расстояний можно узнать из книги Ю. А. Шрейдера «Что такое расстояние?».)

Обычно требуют, чтобы расстояние $r(A, B)$ между точками обладало следующими свойствами:

1) Расстояние $r(A, B)$ между любыми двумя точками A и B *неотрицательно*, причем оно равно нулю лишь в случае, когда точки A и B совпадают.

2) Для любых двух точек A и B выполняется *условие симметрии*

$$r(A, B) = r(B, A).$$

3) Для любых трех точек A, B, C выполняется *неравенство треугольника*

$$r(A, B) \leqslant r(A, C) + r(C, B).$$

Если в каком-нибудь множестве объектов определено расстояние, обладающее этими свойствами, то это множество называют *метрическим пространством*, а элементы множества — точками этого пространства. Точками метрического пространства могут быть даже функции. Для непрерывных функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ на отрезке $[a, b]$ расстояние определяют как наибольшее значение функции $|\varphi(x) - \psi(x)|$ на этом отрезке:

$$r(\varphi, \psi) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\varphi(x) - \psi(x)|.$$

Мы уже видели выше, что плоскость можно различными способами превратить в метрическое пространство: для всех указанных выше способов определения расстояния выполняются условия 1) — 3).

Укажем интересный пример, когда условия 1) и 3) выполнены, а условие симметрии 2) не выполняется. Будем измерять расстояние между точками A и B *в горной местности* временем, нужным, чтобы попасть из A в B. Так как время подъема на вершину горы отличается от времени спуска с нее, то $r(A, B) \neq r(B, A)$.

Оказывается, что для сходимости процесса последовательных приближений при решении системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(x, y), \\ y &= \psi(x, y) \end{aligned}\right\} \qquad (99)$$

достаточно выполнения следующего условия:

Отображение Φ, задаваемое функциями $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, переводит область D в себя и является сжимающим от-

носительно хотя бы одного «расстояния» $r(A, B)$. Иными словами, должно существовать число q такое, что $0 < q < 1$, и для любых двух точек M_1 и M_2 из D выполняется неравенство

$$r(\Phi(M_1), \Phi(M_2)) \leqslant qr(M_1, M_2).$$

Возьмем, например, функции $\varphi(x, y) = 1 + 2y$ и $\psi(x, y) = 3 + \frac{x}{8}$. Оказывается, что определяемое ими отображение Φ является сжимающим с коэффициентом 1/2, если определить расстояние $r(A, B)$ между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ формулой

$$r(A, B) = \left|\frac{1}{2}(x_2 - x_1) + 2(y_2 - y_1)\right| + \left|\frac{1}{2}(x_2 - x_1) - 2(y_2 - y_1)\right|.$$

Например, для точек $A(8, 0)$ и $B(8, 4)$ имеем $r(A, B) = 16$, а для их образов $\Phi(A)$ и $\Phi(B)$ имеем

$$r(\Phi(A), \Phi(B)) = 8.$$

После отображения Φ «расстояние» вдвое уменьшилось. Именно этим объясняется, что процесс итераций для решения системы уравнений

$$x = 1 + 2y,$$
$$y = 3 + \frac{x}{8}$$

сходится, хотя отображение Φ и не является сжимающим относительно обычного расстояния (см. стр. 82).

§ 26. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Применим полученный выше признак сходимости к системам линейных уравнений. Выбирая различным образом «расстояния», мы получим признаки сходимости для этих систем, выраженные через свойства их коэффициентов.

Рассмотрим сначала систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2. \end{aligned}\right\} \qquad (100)$$

Пусть $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} \neq 0$. Решим первое уравнение относительно x, а второе — относительно y. Получим систему уравнений

$$x = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} y,$$

$$y = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x.$$

Для краткости положим $\frac{b_1}{a_{11}} = \beta_1$, $-\frac{a_{12}}{a_{11}} = \alpha_1$, $\frac{b_2}{a_{12}} = \beta_2$, $-\frac{a_{21}}{a_{22}} = \alpha_2$.

Тогда система примет вид

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 y + \beta_1, \\ y &= \alpha_2 x + \beta_2. \end{aligned}\right\} \qquad (100')$$

В данном случае функции, задающие отображение Φ, имеют вид

$$\varphi(x, y) = \alpha_1 y + \beta_1, \ \psi(x, y) = \alpha_2 x + \beta_2.$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_1 и α_2 для того, чтобы это отображение было сжимающим.

Как известно, расстояние $r(A, B)$ между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ выражается формулой

$$r(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Преобразование Φ переводит точку A в точку $A_1(\alpha_1 y_1 + \beta_1, \alpha_2 x_1 + \beta_2)$, а точку B — в точку $B_1(\alpha_1 y_2 + \beta_1, \alpha_2 x_2 + \beta_2)$. Расстояние между этими точками выражается формулой

$$r(A_1, B_1) = \sqrt{(\alpha_1 y_2 - \alpha_1 y_1)^2 + (\alpha_2 x_2 - \alpha_2 x_1)^2} = \\ = \sqrt{\alpha_1^2 (y_2 - y_1)^2 + \alpha_2^2 (x_2 - x_1)^2}. \qquad (101)$$

Обозначим большее из чисел $|\alpha_1|$ и $|\alpha_2|$ через q:

$$q = \max(|\alpha_1|, |\alpha_2|).$$

Тогда из формулы (101) вытекает неравенство

$$r(A_1, B_1) \leqslant q\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = qr(A, B).$$

Значит, если $q < 1$, то отображение Φ является сжимающим на всей плоскости. Тогда, как мы знаем, процесс последовательных приближений сходится.

Итак, мы доказали, что если

$$\max(|\alpha_1|, |\alpha_2|) < 1, \tag{102}$$

то процесс последовательных приближений при решении системы уравнений (100′) всегда сходится.

Выразим полученный признак сходимости непосредственно через коэффициенты системы уравнений (100). Для этого вспомним, что

$$\alpha_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}},$$

$$\alpha_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}.$$

Подставляя эти выражения в условие (102), получаем следующий вывод:

Для сходимости процесса последовательных приближений при решении системы линейных уравнений

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1,$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\max\left(\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right|, \left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right|\right) < 1.$$

Это условие выражает, что диагональные коэффициенты должны быть больше, чем недиагональные коэффициенты, стоящие в той же строке. Поэтому, например, при решении системы

$$x - 3y = -11,$$
$$6x + y = 10$$

первое уравнение надо решить относительно y, а второе —

относительно x:

$$y = \frac{11}{3} + \frac{1}{3}x, \quad x = \frac{5}{3} - \frac{y}{6}.$$

Иногда полезно предварительно преобразовать систему уравнений, заменив неизвестные x и y пропорциональными им неизвестными. Возьмем, например, систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 12x + y &= 14, \\ 3x - 2y &= -1. \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Для нее

$$\max\left(\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right|, \left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right|\right) = \max\left(\frac{1}{12}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},$$

и поэтому не выполняется достаточный признак сходимости процесса приближений. Но если положить $x = \frac{1}{3}z$, то получим систему

$$\left.\begin{aligned} 4z + y &= 14, \\ z - 2y &= -1, \end{aligned}\right\} \tag{104}$$

для которой

$$\max\left(\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right|, \left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right|\right) = \max\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Значит, систему (104) можно решать последовательными приближениями.

Разумеется, никому не придет в голову решать столь простые системы, как (104), методом последовательных приближений. Но для систем с большим числом неизвестных этот метод бывает очень полезен. Достаточные признаки сходимости для решения системы

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

устанавливаются примерно так же, как и для системы уравнений с двумя неизвестными. Однако здесь разные определения расстояния между точками приводят к разным результатам. Именно, справедливо следующее утверждение:

Процесс последовательных приближений для системы (105) *сходится, если выполнено одно из следующих*

условий:

$$1)\ \max_i \sum_{j=1}^{n}{}' \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \tag{106}$$

$$2)\ \max_j \sum_{i=1}^{n}{}' \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \tag{107}$$

$$3)\ \max_k \sum_{i,\,j=1}^{n}{}^{(k)} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|^2 < 1. \tag{108}$$

В суммах (106) и (107) штрих обозначает, что опущено слагаемое, для которого $i = j$. В сумме (108) значок (k) означает, что опущены не только слагаемые, для которых $i = j$, но и слагаемые, для которых $i = k$. Отметим, что условие 3) заведомо выполняется, если

$$\sum_{i,\,j=1}^{n}{}' \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|^2 < 1, \tag{109}$$

где штрих означает пропуск слагаемых, для которых $i = j$. В большинстве книг по вычислительной математике это условие приводится именно в форме (109).

Как мы уже говорили, условия (106) — (108) получаются, если потребовать, чтобы отображение

$$\begin{array}{l}
x_1 \to \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n \to \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 - \cdots - \dfrac{a_{1,\,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1}
\end{array}$$

было сжимающим относительно некоторого расстояния. Именно, условие (106) соответствует расстоянию

$$r(A,\ B) = \max\left(|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\right),$$

условие (107) соответствует расстоянию $r(A, B) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

и условие (108) — расстоянию $r(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

между точками $A(x_1, \ldots, x_n)$ и $B(y_1, \ldots, y_n)$.

Как и в случае двух переменных, иногда бывает полезно заменить неизвестные $x_1, \ldots, x_n$ пропорциональными им неизвестными $y_1 = p_1 x_1, \ldots, y_n = p_n x_n$, где $p_1 > 0, \ldots, p_n > 0$.

В этом случае условия (106), (107), (108) примут вид

$$1') \quad \max_i \sum_{j=1}^{n}{}' \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \frac{p_j}{p_i} < 1, \tag{106'}$$

$$2') \quad \max_j \sum_{i=1}^{n}{}' \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| \frac{p_i}{p_j} < 1, \tag{107'}$$

$$3') \quad \max_k \sum_{i,\, j=1}^{n}{}^{(k)} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|^2 \frac{p_i^2}{p_j^2} < 1. \tag{108'}$$

В частности, при $p_i = |a_{ii}|$ эти условия принимают вид

$$1'') \quad \max_i \sum_{j=1}^{n}{}' \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \tag{106''}$$

$$2'') \quad \max_j \sum_{i=1}^{n}{}' \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| < 1, \tag{107''}$$

$$3'') \quad \max_k \sum_{i,\, j=1}^{n}{}^{(k)} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right|^2 < 1. \tag{108''}$$

Для примера рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} x - 0{,}6y - 0{,}5z &= -2{,}6, \\ -0{,}2x + y - 0{,}4z &= 3, \\ -0{,}1x + 0{,}5y + z &= 3{,}9. \end{aligned}$$

Условия 1), 2), а также 1'), 2') для этой системы не выполняются. Точно так же для нее не имеет места неравенство (109) — сумма квадратов недиагональных элементов равна 1,07. Но

$$\max_k \sum{}^{(k)} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|^2 = \max(0{,}6^2 + 0{,}5^2 + 0{,}2^2 + 0{,}4^2;\ 0{,}6^2 + 0{,}5^2 + 0{,}1^2 + 0{,}5^2;\ 0{,}2^2 + 0{,}4^2 + 0{,}1^2 + 0{,}5^2) = 0{,}87 < 1,$$

и поэтому систему можно решить методом последовательных приближений.

Заметим, что все сформулированные выше условия достаточны для сходимости процесса последовательных приближений, но они никоим образом не являются необходимыми. Выбирая другие определения расстояния между точками и записывая условие сжимаемости, мы получаем иные условия сходимости. Однако этот вопрос мы не будем сейчас рассматривать.

Для систем линейных уравнений верны те же замечания, какие были сделаны в § 5. Например, результат приближений не зависит от выбора начального приближения. Поэтому если в ходе вычислений была допущена ошибка, то она не обесценивает дальнейших вычислений, а лишь замедляет достижение окончательного результата.

Существует ряд разновидностей способа последовательных приближений для решения систем линейных уравнений. Так, в некоторых способах, найдя приближенное значение $x_1^{(n+1)}$, подставляют для нахождения $x_2^{(n+1)}$ значения $x_1^{(n+1)}$, $x_3^{(n)}$, $x_4^{(n)}$, ..., $x_m^{(n)}$; потом для нахождения $x_3^{(n+1)}$ подставляют значения $x_1^{(n+1)}$, $x_2^{(n+1)}$, $x_4^{(n)}$, ..., $x_m^{(n)}$ и т. д. Описание всевозможных способов приближений для систем линейных уравнений могло бы стать темой другой книжки.

§ 27. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ГЕОМЕТРИИ

Мы описали применения способа последовательных приближений для решения уравнений и систем уравнений. Этот метод находит приложения и в некоторых вопросах геометрии, например, при вычислении длины окружности. Как известно, чтобы вычислить длину окружности, сначала находят периметр вписанного в нее квадрата, потом периметр вписанного правильного восьмиугольника, правильного шестнадцатиугольника и т. д. Предел этих периметров и равен длине окружности. При этом каждый последующий периметр вычисляется с помощью предыдущего. Это делается следующим образом:

Обозначим сторону правильного 2^n-угольника через A_n, а его периметр через P_n. Например, A_2 является стороной квадрата, и потому $A_2 = R\sqrt{2}$, $P_2 = 4R\sqrt{2}$. Предположим,

что мы уже нашли P_n. Тогда, очевидно,

$$A_n = \frac{P_n}{2^n}.$$

В геометрии доказывается, что сторона a_{2n} правильного вписанного $2n$-угольника выражается через сторону a_n правильного вписанного n-угольника и радиус R окружности по формуле*)

$$a_{2n} = R\sqrt{2-\sqrt{4-\frac{a_n^2}{R^2}}}. \qquad (110)$$

Значит, сторона A_{n+1} правильного 2^{n+1}-угольника выражается через сторону A_n правильного 2^n-угольника по формуле

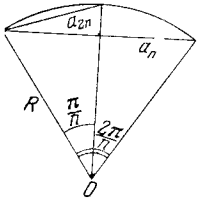
$$A_{n+1} = R\sqrt{2-\sqrt{4-\frac{A_n^2}{R^2}}}.$$

Поскольку $A_n = \frac{P_n}{2^n}$ и $A_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{2^{n+1}}$, то

$$P_{n+1} = 2^{n+1}R\sqrt{2-\sqrt{4-\frac{P_n^2}{2^{2n}R^2}}}. \qquad (110')$$

---

*) Эту формулу легче всего вывести с помощью тригонометрии. Очевидно, если a_n — сторона правильного вписанного n-угольника, а a_{2n} — сторона правильного вписанного $2n$-угольника, то



$$a_n = 2R\sin\frac{\pi}{n} \quad \text{и} \quad a_{2n} = 2R\sin\frac{\pi}{2n}$$

(см. рисунок). Так как

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

то

$$a_{2n} = 2R\sin\frac{\pi}{2n} = 2R\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2}} =$$

$$= R\sqrt{2-2\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{n}}} = R\sqrt{2-\sqrt{4-\frac{a_n^2}{R^2}}}.$$

Последовательность чисел $P_2, P_3, \ldots, P_n \ldots$ стремится к длине окружности, то есть к значению $2\pi R$. Поэтому формулу (110) можно рассматривать как формулу для вычисления значения $2\pi R$ по способу последовательных приближений. Пользуясь этим способом, можно найти значение π с любым числом десятичных знаков.

Существует другой способ приближенного вычисления π, называемый *способом равных периметров*. При этом способе правильный 2^n-угольник заменяется правильным 2^{n+1}-угольником, имеющим тот же периметр. Обозначим апофему правильного 2^n-угольника через l_n, а радиус описанной окружности через r_n. Апофему же правильного 2^{n+1}-

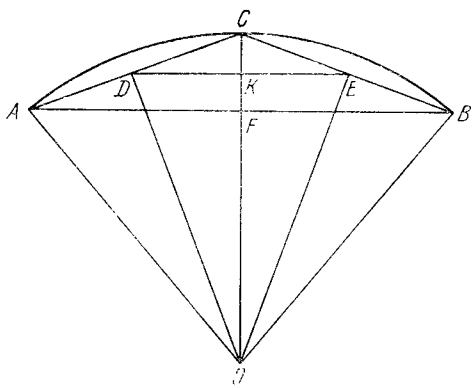


Рис. 23.

угольника, имеющего тот же периметр, что и 2^n-угольник, обозначим через l_{n+1}, а радиус описанной окружности — через r_{n+1}.

Пусть AB (рис. 23) — сторона 2^n-угольника, вписанного в окружность радиуса r_n. Соединим середину C дуги AB с точками A и B и проведем среднюю линию DE треугольника ACB. Очевидно, что угол DOE равен половине угла AOB. Поэтому DE является стороной правильного 2^{n+1}-угольника, вписанного в окружность с радиусом OD. Так как $DE = \frac{1}{2} AB$, то периметр 2^{n+1}-угольника равен периметру 2^n-угольника. Это означает, что $r_{n+1} = OD$, $l_{n+1} = OK$.

Легко сосчитать, что

$$l_{n+1} = OK = \frac{r_n + l_n}{2}. \qquad (111)$$

Далее, из прямоугольного треугольника ODC находим

$$r_{n+1} = \sqrt{r_n l_{n+1}}. \qquad (112)$$

Формулы (111) и (112) выражают r_{n+1} и l_{n+1} через r_n и l_n.

При возрастании n периметры многоугольников не меняются, а числа r_n и l_n приближаются к одному и тому же пределу. Этот предел равен радиусу окружности, длина которой равна периметру наших многоугольников. Если выбрать начальный многоугольник так, чтобы его периметр равнялся двум, то как r_n, так и l_n стремятся к числу $\frac{1}{\pi}$:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \frac{1}{\pi}; \quad \lim_{n\to\infty} l_n = \frac{1}{\pi}.$$

Например, если выбрать за первый многоугольник квадрат со стороной 1/2, то $r_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $l_2 = \frac{1}{4}$. Поэтому имеет место следующее утверждение: если положить $r_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $l_2 = \frac{1}{4}$ и вычислять значения r_{n+1}, l_{n+1}, $n = 2, 3, \ldots$ по формулам (111) и (112), то

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} l_n = \frac{1}{\pi}.$$

По этим формулам можно приближенно найти значение $\frac{1}{\pi}$. Для этого надо вести расчет до тех пор, пока значения r_n и l_n не совпадут в пределах выбранной точности. Это общее значение r_n и l_n и будет значением $\frac{1}{\pi}$ с заданной точностью.

§ 28. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы познакомились в этой книге с применениями способа последовательных приближений к различным вопросам: к составлению планов, к извлечению корней, к решению уравнений, к вычислению длины окружности. Этим не ис-

черпывается многообразие применений этого способа. Очень многие задачи приводят к дифференциальным уравнениям (в которые входят производные искомых функций), к интегральным уравнениям и уравнениям еще более сложного вида. Одним из самых сильных методов приближенного решения таких уравнений также является способ последовательных приближений. Разумеется, его применение в этих случаях значительно сложнее, чем в случае решения алгебраических уравнений. Но можно смело сказать, что без применения способа последовательных приближений нельзя было бы решить ни одной из грандиозных физических и технических задач, которые решаются в настоящее время. И при расчете движения спутника, и при расчете атомного реактора, и при исследовании строения атома применяют этот метод. Однако рассказ о применениях метода последовательных приближений за пределами элементарной математики выходит за рамки этой книги.

УПРАЖНЕНИЯ

Для того чтобы читатель мог проверить, насколько он овладел изложенными в этой книге методами приближенного решения уравнений, мы приводим несколько примеров на приближенное решение уравнений.

Решить по способу итераций уравнения*)

1. $x = \frac{1}{(x+1)^2}$.
2. $x = (x+1)^3$.
3. $x = 4 + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$.
4. $x = 2 \pm \sqrt[4]{x}$.
5. $x = \sqrt[3]{5-x}$.
6. $4 - x = \operatorname{tg} x$.
7. $x^2 = \sin x$.
8. $x^3 = \sin x$.
9. $x = \arcsin \frac{x+1}{4}$.
10. $x = \cos x$.
11. $x = \frac{1}{\cos x}$.
12. $x = 1 + \frac{1}{10} \sin x$.
13. $x = \pm\sqrt{\lg(x+2)}$.
14. $x^2 = \ln(x+1)$.
15. $\ln x = 4 - x^2$.
16. $\ln x = 2 - x$.
17. $x^2 = e^x + 2$.
18. $\lg x = 0{,}1\, x$.
19. $\operatorname{tg} x = \lg x$.
20. $x = \frac{1}{10} e^{-x}$.

Решить по способу Ньютона уравнения

21. $x^3 - 5x + 1 = 0$.
22. $x^3 - 9x^2 + 20x - 11 = 0$.
23. $x^3 - 3x^2 - 3x + 11 = 0$.
24. $x^5 + 5x + 1 = 0$.
25. $\sin x + x = 1$.
26. $x^2 - 10 \lg x - 3 = 0$.

---

*) В некоторых из приведенных здесь примеров надо сначала преобразовать уравнение к виду $x = \varphi(x)$.

27. Решить с точностью до 0,001 методом последовательных приближений системы уравнений:

а) $$\begin{cases} x = 0{,}2y - 0{,}1z + 0{,}898, \\ y = 0{,}3x + 0{,}15z + 1{,}383, \\ z = 0{,}25x - 0{,}4y + 3{,}677; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} x = \frac{1}{4}\sin(x + y) + 0{,}336, \\ y = -\frac{1}{4}\sin(x - y) + 0{,}362; \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} x = \sqrt{x + 2y} - 0{,}710, \\ y = \sqrt{y - x} + 1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЯ

1. Положим $\varphi(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. Тогда $\varphi'(x) = \frac{-2}{(1+x)^3}$. Имеем $\varphi(0) = 1 > 0$, $\varphi(1) = \frac{1}{4} < 1$. Поэтому отрезок $[0, 1]$ содержит корень данного уравнения. Однако мы не можем применить метод последовательных приближений к этому отрезку, так как $|\varphi'(0)| = 2 > 1$. Чтобы сузить отрезок, заметим, что $\varphi(0{,}4) = \frac{1}{1{,}96} > 0{,}4$. Поэтому уравнение имеет корень на отрезке $[0{,}4, 1]$. При этом $|\varphi'(x)| \leqslant \frac{2}{1{,}4^3} < 1$, если $0{,}4 \leqslant x \leqslant 1$, и, значит, можно применить метод последовательных приближений. Полагая $x_1 = 0{,}4$, получаем после 11 шагов приближения, что $x_{11} \approx \varphi(x_{11}) \approx 0{,}4655$.

Значит, с точностью до 0,0001 имеем $x = 0{,}4655$.

2. Положим $\varphi(x) = (x+1)^3$. Тогда $\varphi'(x) = 3(x+1)^2$. Имеем $\varphi(-2) = -1 > -2$, $\varphi(-3) = -8 < -3$. Поэтому отрезок $[-3, -2]$ содержит корень данного уравнения. Однако мы не можем применить метод последовательных приближений, так как на отрезке $[-3, -2]$ имеем $|\varphi'(x)| > 1$. Перепишем заданное уравнение в виде

$$x = \sqrt[3]{x} - 1.$$

Тогда $\psi(x) = \sqrt[3]{x} - 1$ и $\psi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. На отрезке $[-3, -2]$ имеем $|\psi'(x)| \leqslant \frac{1}{3\sqrt[3]{x}} < 1$, и поэтому можно использовать метод последовательных приближений. Полагая $x_1 = -2$, получаем $x_6 \approx \psi(x_6) \approx \approx -2{,}325$. Значит, с точностью до 0,001 имеем $x = -2{,}325$.

3. Положим $\varphi(x) = 4 + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$. Мы имеем

$$\varphi'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^4}}.$$

Рис. 24 показывает, что прямая $y = x$ пересекается с кривой $y = 4 + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$ в двух точках, лежащих соответственно на отрезках $[-1, 0]$ и $[4, 5]$. На отрезке $[4, 5]$ имеем $|\varphi'(x)| \leqslant \frac{2}{15\sqrt[3]{45}} < 1$. Полагая $x_1 = 4$, имеем $x_3 \approx \varphi(x_3) \approx 4{,}870$. Значит, с точностью до 0,001 получаем $x_3 = 4{,}870$.

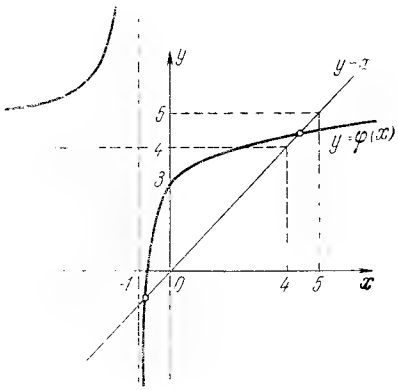


Рис. 24.

На отрезке $[-1, 0]$ метод последовательных приближений непосредственно не применим. Перепишем на этом отрезке уравнение в виде $(x-4)^3 = \frac{x-1}{x+1}$, откуда $\frac{x-1}{(x-4)^3} = x + 1$ и

$$x = \frac{x-1}{(x-4)^3} - 1.$$

Здесь $\psi(x) = \frac{x-1}{(x-4)^3} - 1$ и $\psi'(x) = \frac{-2x-1}{(x-4)^4}$. Ясно, что при $-1 \leqslant x \leqslant 0$ имеем $|\psi'(x)| \leqslant \frac{1}{256} < 1$, и теперь можно применить метод последовательных приближений. Полагая $x_1 = 0$, имеем $x_2 \approx \psi(x_2) \approx -0{,}9840$. Значит, с точностью до 0,0001 имеем $x = -0{,}9840$.

Мы нашли два корня: $x = -0{,}9840$, $x = 4{,}870$.

4. Здесь $\varphi_1(x) = 2 + \sqrt[4]{x}$ и $\varphi_2(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$. Из рис. 25 видно, что уравнение $x = 2 + \sqrt[4]{x}$ имеет корень на отрезке $[3, 4]$. На этом отрезке

$$|\varphi'(x)| = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} < 1.$$

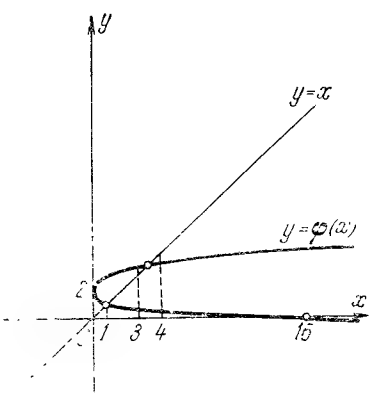


Рис. 25.

Применяем метод последовательных приближений. Полагая $x_1 = 4$, имеем $x_4 \approx \varphi(x_4) \approx 3{,}353$. Значит, с точностью до 0,001 имеем $x = 3{,}353$.

Теперь решим уравнение $x = 2 - \sqrt[3]{x}$. Оно имеет корень $x = 1$. Итак, корни уравнения равны 1 и 3,353.

5. Здесь $\varphi(x) = \sqrt[3]{5-x}$ и $\varphi(x) = \dfrac{-1}{3\sqrt[3]{(5-x)^2}}$. Имеем

$$\varphi(1) = \sqrt[3]{4} < 2, \quad \varphi(2) = \sqrt[3]{3} > 1.$$

Поэтому существует корень уравнения на отрезке [1, 2]. На этом отрезке $|\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{1}{3\sqrt[3]{9}} < 1$. Полагая $x_1 = 1$, имеем $x_5 \approx \varphi(x_5) \approx 1{,}516$.

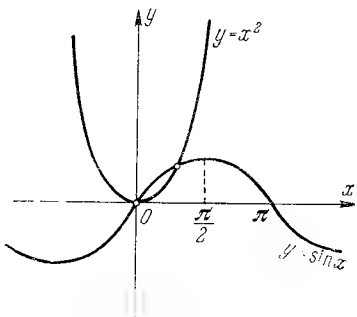


Рис. 26.

Значит, с точностью до 0,001 имеем $x = 1{,}516$.

6. Запишем уравнение в виде

$$x = \operatorname{arctg}(4 - x).$$

Здесь $\varphi(x) = \operatorname{arctg}(4 - x)$. Мы имеем $\varphi(1) = \operatorname{arctg} 3 \approx 1{,}25$, $\varphi(2) = \operatorname{arctg} 2 \approx 1{,}10$ Отсюда следует, что существует корень этого уравнения, лежащий на отрезке [1, 2]. На этом отрезке имеем

$$|\varphi'(x)| = \frac{1}{1 + (4-x)^2} \leqslant \frac{1}{5}.$$

Поэтому можно применить метод последовательных приближений. Полагая $x_1 = 1$, имеем $x_4 \approx \varphi(x_4) \approx 1{,}225$. Значит, с точностью до 0,001 имеем $x = 1{,}225$.

7. Заданное уравнение имеет корень $x = 0$. Из рис. 26 видно, что второй корень уравнения положителен. Поэтому он удовлетворяет уравнению $x = \sqrt{\sin x}$. Здесь $\varphi(x) = \sqrt{\sin x}$ и $\varphi'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$. Так как

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\sin\frac{1}{2}} \approx \sqrt{0{,}4794} > \frac{1}{2}$$

и

$$\varphi(1) = \sqrt{\sin 1} \approx \sqrt{0{,}8414} < 1,$$

то уравнение имеет корень на отрезке [1/2; 1]. На этом отрезке имеем

$$|\varphi'(x)| \leqslant \frac{\cos\frac{1}{2}}{2\sqrt{\sin\frac{1}{2}}} \approx \frac{0{,}8703}{1{,}3846} < 1,$$

и потому метод последовательных приближений сходится. Полагая $x_1 = 1$, имеем $x_7 \approx \varphi(x_7) \approx 0{,}8768$. Значит, с точностью до 0,0001 второй корень уравнения равен 0,8768.

8. Решается аналогично предыдущему. Переписываем уравнение в виде

$$x = \sqrt[3]{\sin x},$$

полагаем $x_1 = 1$ и получаем $x_6 \approx \varphi(x_6) \approx 0{,}9286$. Поэтому с точностью до 0,001 один из корней уравнения равен 0,9286. Так как обе части уравнения — нечетные функции, то имеем еще корень —0,9286. Третьим корнем является 0.

9. Уравнение можно переписать в виде $\frac{x+1}{4} = \sin x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$. Из рис. 27 видно, что это уравнение имеет единственный корень, лежащий между 0 и $\pi/2$. В данном случае

$$\varphi(x) = \arcsin\frac{x+1}{4},$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{16-(x+1)^2}}.$$

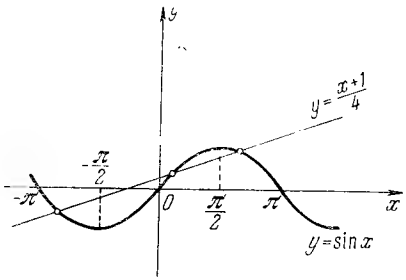


Рис. 27.

На отрезке $[0, \pi/2]$ имеем $|\varphi'(x)| < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$. Полагая $x_1 = 0$, находим $x_8 \approx \varphi(x_8) \approx 0{,}3422$. Значит, с точностью до 0,0001 имеем $x = 0{,}3422$.

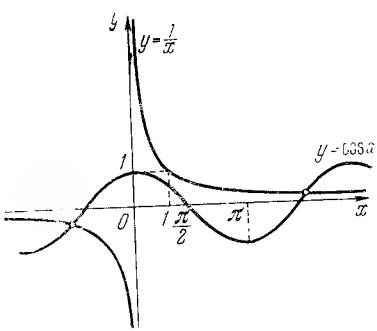


Рис. 28.

10. Так как $\cos 0 = 1$, $\cos 1 > 0$, то уравнение $x = \cos x$ имеет корень на отрезке $[0, 1]$. Поскольку $|\varphi'(x)| \leqslant \sin 1 < 1$, то можно применить метод последовательных приближений. Полагая $x_1 = 1$, получаем, что с точностью до 0,0001 $x = 0{,}7391$.

11. На рис. 28 видно, что положительные корни уравнения близки к точкам пересечения графика функции $y = \cos x$ с осью абсцисс и расположены справа от точек пересечения вида $\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$ и слева от точек пересечения вида $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Чтобы найти решение, расположенное около точки $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, положим $x - n\pi - \frac{\pi}{2} = y$. Уравнение примет вид

$$y + n\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\cos\left(y + n\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sin y}.$$

При этом $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, и потому уравнение можно записать так:

$$y = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{y + n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Здесь

$$\varphi(y) = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{y + n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

и

$$\varphi'(y) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\left(y + n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 - 1}\left(y + n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Ясно, что вблизи точки $y = 0$ имеем $|\varphi'(y)| < q < 1$, и потому можно применить метод последовательных приближений. Найдем решение при $n = 1$ с точностью до 0,001. Пусть $y_0 = 0$. Тогда $y_2 \approx \varphi(y_2) \approx 0{,}204$. Поэтому $y \approx 0{,}204$; $x = \frac{3}{2}\pi + y \approx 4{,}917$.

Чтобы найти первый отрицательный корень, положим $n = -1$. Мы получим уравнение

$$y = \arcsin \frac{1}{y - \frac{\pi}{2}}.$$

Положим $y_0 = 0$. Тогда

$$y_6 \approx \varphi(y_6) \approx -0{,}503.$$

Таким образом, $y \approx -0{,}503$, а потому $x \approx -2{,}074$.

При больших значениях $|n|$ метод последовательных приближений дает приближенную формулу для y:

$$y \approx \varphi(y_0) = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} \approx \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{(2n+1)\pi}.$$

Поэтому

$$x \approx \frac{\pi}{2}(2n+1) + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{(2n+1)\pi}.$$

12. Полагая $x_1 = 0$, находим, что $x_3 \approx \varphi(x_3) \approx 1{,}088$. Значит, с точностью до 0,001 $x \approx 1{,}088$.

13. Сначала решим уравнение $x = \sqrt{\lg(x+2)}$. Мы имеем $\varphi(x) = \sqrt{\lg(x+2)}$, и потому

$$\varphi'(x) = \frac{\lg e}{2(x+2)\sqrt{\lg(x+2)}}.$$

Так как $\varphi(0) = \sqrt{\lg 2} > 0$, $\varphi(1) = \sqrt{\lg 3} < 1$, то уравнение имеет корень на отрезке $[0, 1]$. На этом отрезке выполняется неравенство

$|\varphi'(x)| < q < 1$. Значит, можно применить метод последовательных приближений. Полагая $x_1 = 1$, имеем $x_5 \approx \varphi(x_5) \approx 0{,}6507$. Значит, корень уравнения $x = \sqrt{\lg(x+2)}$ с точностью до 0,0001 равен $x = 0{,}6507$.

Рассмотрим уравнение

$$x = -\sqrt{\lg(x+2)}.$$

Здесь

$$\varphi(x) = -\sqrt{\lg(x+2)}.$$

Так как $\varphi(0) = -\sqrt{\lg 2} = -0{,}55$, $\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\lg 1{,}5} = -0{,}42$, то данное уравнение имеет корень на отрезке $[-1/2, 0]$. Полагая $x_1 = 0$, находим, что $x_8 \approx \varphi(x_8) \approx -0{,}4397$. Итак, с точностью до 0,0001 имеем $x = -0{,}4397$.

14. Одним из корней уравнения является $x = 0$. Чтобы найти второй корень, запишем уравнение в виде $x = \pm\sqrt{\ln(x+1)}$. Для уравнения $x = \sqrt{\ln(x+1)}$ имеем

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\ln\frac{3}{2}} > \frac{1}{2},$$

$$\varphi(1) = \sqrt{\ln 2} < 1.$$

Значит, уравнение имеет корень на отрезке $[1/2, 1]$. Так как $\varphi'(x) = \frac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$, то на отрезке $[1/2, 1]$ имеем $|\varphi'(x)| < q < 1$. Положим $x_1 = 1$, тогда $x_9 \approx \varphi(x_9) \approx 0{,}7469$. Итак, с точностью до 0,0001 имеем $x = 0{,}7469$. Уравнение $x = -\sqrt{\ln(x+1)}$ не имеет корней, кроме $x = 0$. Итак, $x = 0$ или $x = 0{,}7469$.

15. Перепишем уравнение в виде

$$x = \sqrt{4 - \ln x}.$$

Здесь

$$\varphi(1) = 2,\ \varphi(2) = \sqrt{4 - \ln 2},\ \varphi'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{4 - \ln x}}.$$

Так как $\varphi(1) = 2$, $\varphi(2) = \sqrt{4 - \ln 2} < 2$, то уравнение имеет корень на отрезке $[1, 2]$. Из рис. 29 видно, что других корней уравнение не имеет. Полагая $x_1 = 2$, получаем

$$x_4 \approx \varphi(x_4) \approx 1{,}841.$$

Итак, с точностью до 0,001 $x = 1{,}841$.

16. Запишем уравнение в виде

$$x = 2 - \ln x.$$

Здесь $\varphi(x) = 2 - \ln x$, $\varphi'(x) = -\frac{1}{x}$. Из рис. 30 видно, что корень уравнения лежит на отрезке $[1, 2]$. На этом отрезке $|\varphi'(x)| \leqslant 1$.

Полагая $x_1 = 1{,}5$, находим $x_{13} \approx \varphi(x_{13}) \approx 1{,}557$. Итак, $x = 1{,}557$ с точностью до 0,001.

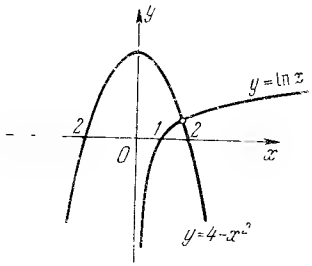


Рис. 29.

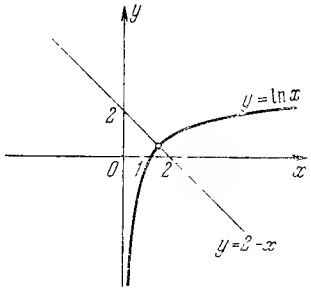


Рис. 30.

17. Из рис. 31 видно, что уравнение имеет лишь один отрицательный корень. Запишем уравнение в виде

$$x = -\sqrt{e^x + 2}.$$

Тогда

$$\varphi(x) = -\sqrt{e^x + 2}, \quad \varphi'(x) = \frac{-e^x}{2\sqrt{e^x + 2}}$$

и

$$\varphi(-1) = -\sqrt{2 + e^{-1}} \approx -1{,}54; \quad \varphi(-2) = -\sqrt{2 + e^{-2}} \approx -1{,}46$$

Значит, корень лежит на отрезке $[-1, -2]$. Полагая $x_1 = -1$, находим $x_4 \approx \varphi(x_4) \approx -1{,}492$. Значит, с точностью до 0,001 имеем $x = -1{,}492$.

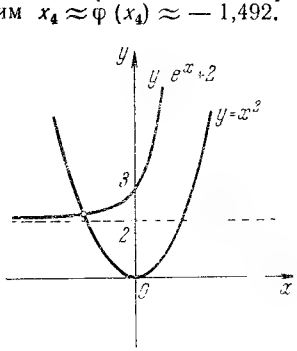


Рис. 31.

18. Ясно, что одним из корней уравнения является $x_1 = 10$. Чтобы найти второй корень, запишем уравнение в виде $x = 10^{0{,}1x}$. Здесь $\varphi(x) = 10^{0{,}1x}$, $\varphi'(x) = 0{,}1 \cdot 10^{0{,}1x} \ln 10$. Кроме того, $\varphi(1) = 10^{0{,}1} > 1$, $\varphi(2) = 10^{0{,}2} < 2$. Поэтому уравнение имеет корень на отрезке $[1, 2]$. На этом отрезке

$$|\varphi'(x)| \leqslant 0{,}1 \cdot 10^{0{,}2} \cdot \ln 10 \approx 0{,}37 < 1.$$

Теперь можно применить метод последовательных приближений. Полагая $x_1 = 2$, находим, что $x_7 \approx \varphi(x_7) \approx 1{,}372$. Итак, с точностью до 0,001 имеем $x = 1{,}372$.

19. Из рис. 32 видно, что уравнение имеет по одному корню на каждом из отрезков

$$\left[\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi\right], \; n = 0, 1, \ldots,$$

причем эти корни лежат в правых половинах отрезков. Чтобы найти первый положительный корень, сделаем подстановку $x = \frac{3\pi}{2} - y$. Уравнение примет вид

$$\operatorname{ctg} y = \lg\left(\frac{3\pi}{2} - y\right),$$

откуда, поскольку $0 < y < \pi$, имеем

$$y = \operatorname{arcctg}\left[\lg\left(\frac{3}{2}\pi - y\right)\right].$$

Здесь

$$\varphi(y) = \operatorname{arcctg}\left[\lg\left(\frac{3}{2}\pi - y\right)\right]$$

и

$$\varphi'(y) = \frac{-\lg e}{\left[1 + \lg^2\left(\frac{3}{2}\pi - y\right)\right]\left(\frac{3}{2}\pi - y\right)}.$$

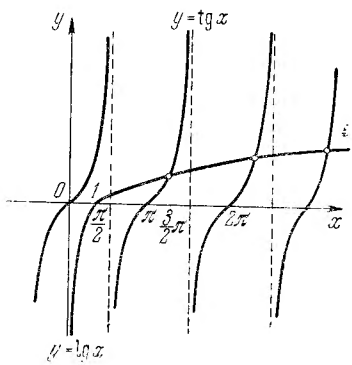


Рис. 32.

На отрезке $[0, \pi]$ есть корень нашего уравнения, причем на этом отрезке $|\varphi'(y)| < 1$. Применим метод последовательных приближений. Полагая $y_1 = 0$, имеем $y_4 \approx \varphi(y_4) \approx 1{,}059$. Значит, с точностью до 0,001 имеем $y = 1{,}059$, а потому $x = 3{,}654$.

Чтобы найти второй положительный корень, полагаем $x = \frac{5}{2}\pi - y$. Уравнение принимает вид

$$y = \operatorname{arcctg}\left[\lg\left(\frac{5}{2}\pi - y\right)\right].$$

Полагая $y_1 = 0$, получаем $y_4 \approx \varphi(y_4) \approx 0{,}876$. Значит, с точностью до 0,001 $y = 0{,}870$ и $x = 6{,}984$.

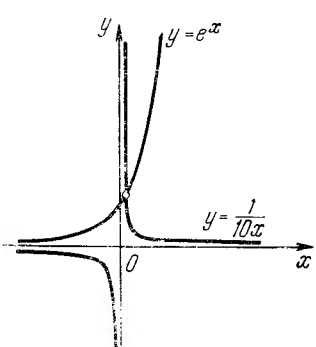


Рис. 33.

20. Из рис. 33 видно, что уравнение имеет один корень, лежащий между 0 и 1. Мы имеем $\varphi(x) = \frac{1}{10}e^{-x}$, $\varphi'(x) = -\frac{1}{10}e^{-x}$. На отрезке $[0, 1]$ выполняется неравенство $|\varphi'(x)| \leqslant \frac{1}{10}$, обеспечивающее возможность применения метода последовательных приближений. Полагая $x_1 = 0$, находим $x_4 \approx \varphi(x_4) \approx 0{,}091$. Значит, с точностью до 0,0001 имеем $x = 0{,}091$.

21. Пусть

$$f(x) = x^3 - 5x + 1.$$

Тогда

$$f'(x) = 3x^2 - 5, \quad f''(x) = 6x.$$

По формуле Ньютона имеем

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \frac{\beta_n^3 - 5\beta_n + 1}{3\beta_n^2 - 5}.$$

Составим таблицу значений функции:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-11	3	5	1	-3	-1	13

Из этой таблицы видно, что уравнение $x^3 - 5x + 1 = 0$ имеет корни на отрезках $[-3, -2]$, $[0, 1]$, $[2, 3]$.

Найдем сначала корень, лежащий на отрезке $[-3, -2]$. Так как на этом отрезке $f''(x) < 0$, то в качестве начального значения берем $\beta_0 = -3$ (так как $f(\beta_0) = -11$ — отрицательное число). Мы имеем

$$\beta_1 = -3 - \frac{(-3)^3 - 5(-3) + 1}{3(-3)^2 - 5} = -2{,}5.$$

Продолжая вычисления, находим, что $\beta_3 = \beta_4 \approx -2{,}331$. Получаем, что с точностью до 0,001 корень уравнения на отрезке $[-3, -2]$ равен $-2{,}331$.

Теперь найдем корень, лежащий на отрезке $[0, 1]$. Здесь мы имеем $f''(x) \geqslant 0$. Поэтому полагаем $\beta_0 = 0$. Отсюда получаем

$$\beta_1 = 0 - \frac{0^3 - 5\cdot 0 + 1}{3\cdot 0^2 - 5} = 0{,}2, \qquad \beta_3 = \beta_4 = 0{,}202.$$

С точностью до 0,001 имеем $x = 0{,}202$.

Наконец, для нахождения корня на отрезке $[2, 3]$ полагаем $\beta_0 = 3$ и имеем

$$\beta_1 = 3 - \frac{3^3 - 5\cdot 3 + 1}{3\cdot 3^2 - 5} \approx 2{,}409.$$

Продолжая вычисления, находим, что $\beta_4 \approx \beta_5 = 2{,}128$. Поэтому с точностью до 0,001 корень равен 2,128. Мы нашли три корня: $x_1 = -2{,}331$; $x_2 = 0{,}202$; $x_3 = 2{,}128$.

Решим это же уравнение усовершенствованным методом хорд. На отрезке $[-3, -2]$ находим

$$\alpha_1 = -3 - f(-3)\frac{-3 - (-2)}{f(-3) - f(-2)} = -3 + 11\frac{(-3)}{-14} \approx -2{,}214.$$

Так как на этом отрезке $f''(x) < 0$, то кривая вогнута вниз и мы определяем α_2 по формуле

$$\alpha_2 = -3 - f(-3)\frac{-3 - (-2{,}214)}{f(-3) - f(-2{,}214)} \approx -2{,}293.$$

Далее находим

$$\alpha_3 = -2,293 - f(-2,293)\,\frac{-2,293 + 2,214}{f(-2,293) - f(-2,214)} \approx -2,331.$$

Это совпадает с точностью до 0,001 с ранее найденным значением x.

Точно так же решаем уравнение иа отрезках [0, 1] и [2, 3].

22. Здесь мы имеем

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 20x - 11,$$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 20,$$

$$f''(x) = 6x - 18 = 6(x-3).$$

Составим таблицу функции $f(x)$:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	—11	1	1	—5	—11	—11	1

Корни уравнения лежат на отрезках [0, 1], [2, 3], [5, 6].

На отрезке [0,1] полагаем $\beta_0 = 0$ и находим, что $\beta_4 \approx \beta_5 \approx 0,834$. На отрезке [2, 3] полагаем $\beta_0 = 3$ и находим, что $\beta_2 \approx \beta_3 \approx 2,216$. На отрезке [5, 6] полагаем $\beta_1 = 0$ и находим, что $\beta_4 \approx \beta_5 \approx 5,249$. Мы нашли (с точностью до 0,001) три корня уравнения

$$x_1 = 0,834;\ x_2 = 2,216;\ x_3 = 5,249.$$

23. Здесь $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 11$, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 3$, $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$. Составим таблицу значений для $f(x)$:

x	—2	—1	0	1	2	3
$f(x)$	—3	10	11	6	1	2

Уравнение имеет один действительный корень, лежащий на отрезке [—2, —1]. Чтобы найти этот корень, полагаем $\beta_0 = -2$. Мы получаем, что $\beta_2 \approx \beta_3 \approx -1,847$. Поэтому с точностью до 0,001 имеем $x = -1,847$.

24. Здесь $f(x) = x^5 + 5x + 1$, $f'(x) = 5x^4 + 5$, $f''(x) = 20x^3$. Таблица значений функции $f(x)$:

x	—1	0	1
$f(x)$	—5	1	7

Поэтому уравнение имеет один корень на отрезке $[-1, 0]$. Полагаем $\beta_0 = -1$. Имеем с точностью до 0,0001 $\beta_3 \approx \beta_4 \approx -0{,}1999$. Поэтому с указанной точностью $x = -0{,}1999$.

25. Здесь $f(x) = \sin x + x - 1$, $f'(x) = \cos x + 1$, $f''(x) = -\sin x$.

Таблица значений функции:

x	0	1	2
$f(x)$	-1	0,8115	1,9093

Корень лежит на отрезке $[0, 1]$. Полагаем $\beta_0 = 0$ и находим, что $\beta_2 = \beta_3 = 0{,}5110$. Поэтому с точностью до 0,0001 имеем $x = 0{,}5110$.

26. Здесь $f(x) = x^2 - 10 \lg x - 3$, $f'(x) = 2x - \frac{10}{x \ln 10}$, $f''(x) = 2 + \frac{10}{x^2 \ln 10}$. Таблица значений функции $f(x)$:

x	0,5	1	2	3
$f(x)$	0,26	-2	$-2{,}01$	1,23

Корни уравнения лежат на отрезках $[0{,}5, 1]$ и $[2, 3]$. На отрезке $[0{,}5, 1]$ полагаем $\beta_0 = 0{,}5$ и получаем, что $\beta_2 = \beta_3 \approx 0{,}535$. Поэтому соответствующий корень с точностью до 0,001 равен 0,535. На отрезке $[2, 3]$ полагаем $\beta_0 = 3$ и находим $\beta_2 \approx \beta_3 \approx 2{,}705$.

Уравнение имеет два корня: $x_1 = 0{,}535$; $x_2 = 2{,}705$.

27. В системе а) полагаем $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ и после нескольких приближений находим, что с точностью до 0,001 $x = 1{,}021$, $y = 2{,}150$, $z = 3{,}072$.

В системе б) полагаем $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ и после нескольких приближений получаем (с точностью до 0,001) $x = 0{,}520$, $y = 0{,}310$.

В системе в) полагаем $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ и находим, что $x = 1{,}000$, $y = 2{,}000$.